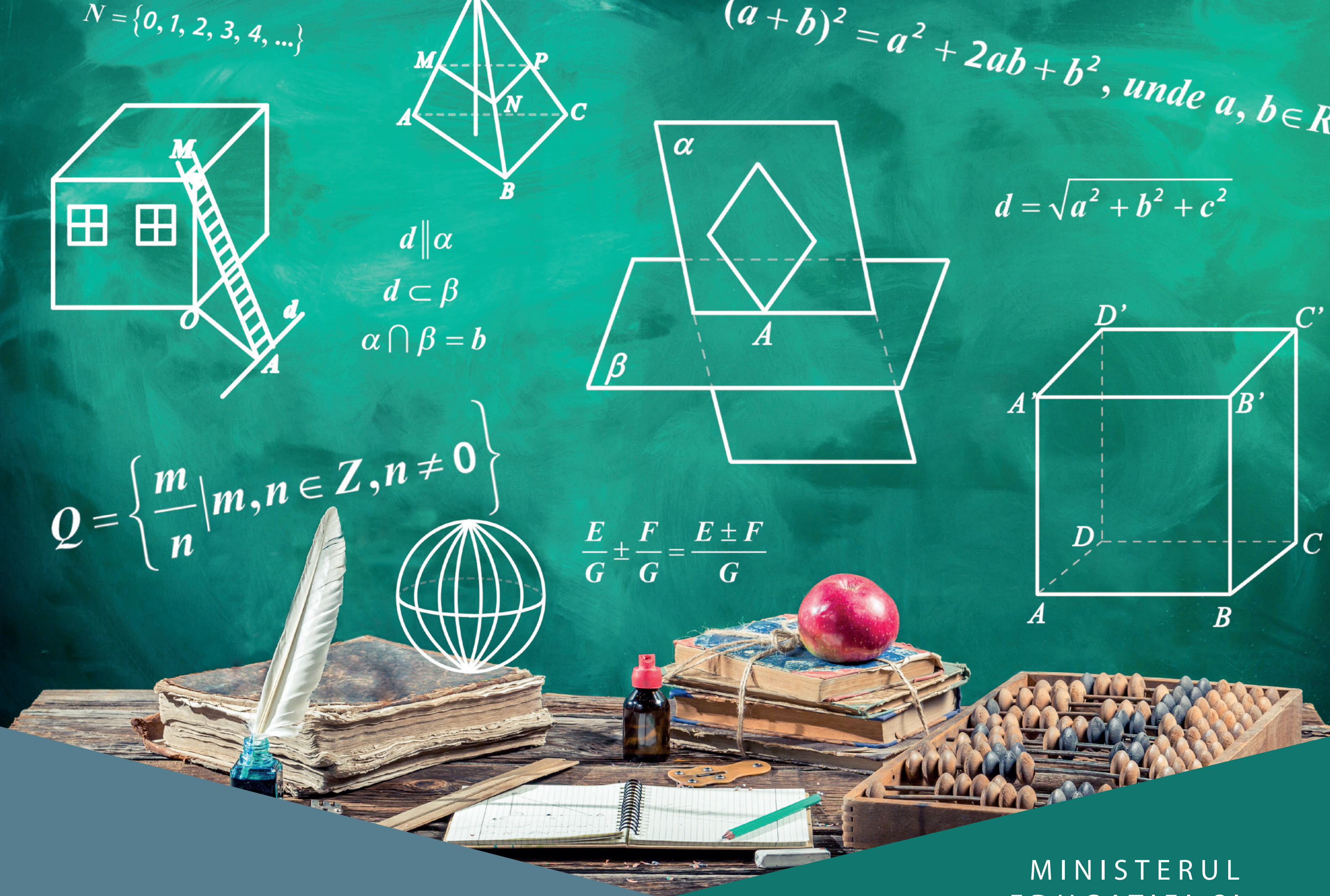


MINISTERUL
EDUCAȚIEI ȘI
CERCETĂRII

CONSTANTIN BASARAB
CĂTĂLIN CRISTEA
DĂNUȚ DRĂCEA
DAN SECLĂMAN

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a VIII-a

EDITURA CD PRESS
www.cdpress.ro

Acest manual școlar este proprietatea Ministerului Educației și Cercetării.
Acest manual a fost aprobat prin ordinul ministrului educației și cercetării nr. 5523/07.09.2020.
Acest manual școlar este realizat în conformitate cu programa școlară
aprobată prin OM nr. 3393/28.02.2017.

116.111 – numărul
de telefon de asistență
pentru copii

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

CONSTANTIN BASARAB
DĂNUȚ DRĂCEA
CĂTĂLIN CRISTEA
DAN SECLĂMAN

Matematică

Manual pentru clasa a VIII-a

EDITURA CD PRESS
www.cdpress.ro

MATEMATICĂ
Manual pentru clasa a VIII-a

Editor: dr. Costin DIACONESCU
Layout, tehnoredactare: Irina SUCIU
Coordonator tehnic şi IT: Răzvan SOCOLOV

Referenţi de specialitate:
Prof. univ. Vicenţiu RĂDULESCU – Departamentul de matematică, Universitatea din Craiova
Prof. dr. grad I Raluca CIURCEA, Colegiul Naţional „Carol I”

Credite foto/ilustraţii:
Dreamstime; Wikimedia Commons – Domeniu Public
Credite video:
Videoblocks, Audioblocks, Dreamstime

DESCRIEREA CIP A BIBLIOTECII NAŢIONALE A ROMÂNIEI

MATEMATICĂ : MANUAL PENTRU CLASA A VIII-A / CONSTANTIN BASARAB, CĂTĂLIN CRISTEA, DĂNUŢ DRĂCEA, DAN SECLĂMAN. - BUCUREŞTI : CD PRESS, 2020
ISBN 978-606-528-518-7

I. BASARAB, CONSTANTIN
II. CRISTEA, CĂTĂLIN
III. DRĂCEA, DĂNUŢ
IV. SECLĂMAN, DAN

51

ISBN: 978-606-528-518-7

Editura CD PRESS
Bucureşti, str. Logofătul Tăutu nr. 67, sector 3, cod 031212
Tel.: 021.337.37.17, 021.337.37.27, 021.337.37.37 Fax: 021.337.37.57
e-mail: office@cdpress.ro • www.cdpress.ro • Editura CD PRESS

Comenzi:
manuale@cdpress.ro • 021.337.37.37
www.cdpress.ro

Inspectoratul Şcolar al Judeţului/Municipiului ....
Şcoala/Colegiul/Liceul ....

ACEST MANUAL A FOST FOLOSIT DE:

Anul	Numele elevului	Clasa	Anul şcolar	Aspectul manualului*	
				format tipărit	
				la primire	la predare
1					
2					
3					
4					

**Pentru precizarea aspectului manualului se va folosi unul dintre următorii termeni: nou, bun, îngrijit, neîngrijit, deteriorat.*
• Cadrele didactice vor verifica dacă informaţiile înscrise în tabelul de mai sus sunt corecte.
• Elevii nu vor face niciun fel de însemnări pe manual.

Cuprins

PREZENTAREA MANUALULUI

Manualul dezvoltă capacitatea elevilor de a efectua operații logice de analiză, sinteză, comparație, generalizare, concretizare, de a explica pe bază de argumente, de a efectua raționamente inductive, deductive și analogice, de a gândi divergent, de a transfera cunoștințele în situații diferite și de a se autoevalua.

Se vizează, formarea capacității elevilor de a operaționaliza cunoștințele dobândite, de a le utiliza în situații concrete de viață, în cotidian. Manualul nu se reduce la prezentarea unor descrieri și exemplificări, ci, prin scheme, modele, propoziții lacunare, întrebări și indicații, probleme, elevul este îndemnat să facă demersuri cognitive, investigații, fiind implicat direct în activitatea de „descoperire”.

Conținuturile cuprinse în programă au fost distribuite pe unități didactice (lecții) grupate în cinci capitole.

Subiectele au fost astfel înlănțuite încât să se permită tratarea diferitelor părți ale programei în ordinea lor firească și progresivă.

Activitățile și exercițiile relativ independente și foarte variate servesc scopurilor propuse, în concordanță cu capacitățile elevilor.

Ansamblul favorizează îmbinarea dintre munca independentă a elevilor și activitatea dirijată din clasă.

Manualul poate fi utilizat diferențiat în funcție de capacitățile de înțelegere ale elevilor și de obiectivele urmărite.

Fiecare unitate didactică, numită lecție, reactivează sistemul de cunoștințe anterior asimilate, îl familiarizează pe elev cu terminologia cercetării, îl antrenează în descoperirea de noi cunoștințe, de tehnici de lucru, de procedee, proprietăți, noțiuni, pornind de la condiții date, prin aplicarea unui raționament inductiv.

În cadrul fiecărei unități didactice sunt sistematizate noțiunile și procedeele prezentate, realizând o sinteză riguroasă și accesibilă, aceasta realizându-se prin *comentarii*, *exemple* și *observații*.

Secțiunea **Probleme rezolvate** oferă modele pentru rezolvarea unor tipuri noi de probleme, probleme referitoare la cunoștințele nou dobândite.

Secțiunile **Teme de sinteză** și **Teme pentru lucru în echipe** permit profesorului realizarea unor mini colective de elevi, în așa fel încât, într-o formă modernă, să se rezolve anumite teme mai complexe care necesită dezbaterea mai multor tipuri de idei.

Secțiunea **Probleme**, din cadrul fiecărei unități, oferă aplicații variate prin care elevul are posibilitatea să-și fixeze, să aprofundeze, să dezvolte și să aplice creator cunoștințele dobândite, iar profesorul poate să evalueze continuu cunoștințele, priceperile și deprinderile elevilor. În același timp, această secțiune permite elevului să se autoevalueze, folosind și răspunsurile care sunt prezente în manual.

Manualul cuprinde rubrica de **Probleme recapitulative**, care realizează, prin problemele propuse spre rezolvare, o legătură între ultimele cunoștințe dobândite.

Rubrica **Test de autoevaluare** permite realizarea unui portofoliu pe întregul an școlar de fiecare elev în parte.

În rubrica **Variante de teză pentru semestrul I** și, respectiv, pentru **semestrul al II-lea**, sunt propuse spre rezolvare câte două variante realizate în concordanță cu subiectele propuse la examenul de Evaluare Națională. Pentru finalizarea pregătirii examenului de Evaluare Națională sunt propuse **Teste pentru pregătirea examenului de E.N.**

Descoperă în manualul digital activități multimedia interactive de învățare (AMII) legate de tema lecției. Acestea sunt evidențiate în varianta digitală și în cea tipărită prin simbolurile următoare:

COMPETENȚE GENERALE. COMPETENȚE SPECIFICE

Competențe generale conform programei

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar
2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale
3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice
4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată
5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date
6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

Competențe specifice conform programei

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

1.1. Recunoașterea apartenenței unui număr real la o mulțime
1.2. Identificarea componentelor unei expresii algebrice
1.3. Identificarea unor dependențe funcționale în diferite situații date
1.4. Identificarea unor figuri plane sau a unor elemente caracteristice acestora în configurații spațiale date
1.5. Identificarea corpurilor geometrice și a elementelor metrice necesare pentru calcularea ariei sau a volumului acestora

2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

2.1. Efectuarea unor operații cu intervale numerice reprezentate pe axa numerelor sau cu mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor ei
2.2. Aplicarea unor reguli de calcul cu numere reale exprimate prin litere
2.3. Descrierea unei dependențe funcționale într-o situație dată, folosind diagrame, tabele sau formule
2.4. Reprezentarea, prin desen sau prin modele, a unor configurații spațiale date
2.5. Prelucrarea unor date caracteristice ale corpurilor geometrice studiate în vederea calculării unor elemente ale acestora

3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

3.1. Utilizarea unor procedee matematice pentru operații cu intervale și rezolvarea inecuațiilor în **R**
3.2. Utilizarea formulelor de calcul prescurtat și a unor algoritmi pentru rezolvarea ecuațiilor și a inecuațiilor
3.3. Reprezentarea în diverse moduri a unor funcții cu scopul caracterizării acestora
3.4. Folosirea unor proprietăți de paralelism sau perpendicularitate pentru analizarea pozițiilor relative ale dreptelor și planelor
3.5. Alegerea metodei adecvate pentru calcularea unor caracteristici numerice ale corpurilor geometrice

4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

4.1. Folosirea terminologiei aferente noțiunilor de mulțime, de interval numeric și de inecuații
4.2. Exprimarea matematică a unor situații concrete prin calcul algebric
4.3. Utilizarea unui limbaj specific pentru formularea unor opinii referitoare la diferite dependențe funcționale
4.4. Descrierea în limbaj matematic a elementelor unei configurații geometrice
4.5. Utilizarea unor termeni și expresii specifice pentru descrierea proprietăților figurilor și corpurilor geometrice

5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

5.1. Interpretarea unei situații date utilizând intervale și inecuații
5.2. Interpretarea unei situații date utilizând calcul algebric
5.3. Analizarea unor funcții în context intra și interdisciplinar
5.4. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea descrierii unor configurații spațiale și a calculării unor elemente metrice
5.5. Analizarea condițiilor necesare pentru ca o configurație geometrică spațială să verifice anumite cerințe date

6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

6.1. Rezolvarea unor situații date, utilizând intervale numerice sau inecuații
6.2. Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea ecuațiilor sau a formulelor de calcul prescurtat
6.3. Modelarea cu ajutorul funcțiilor a unor fenomene din viața reală
6.4. Modelarea unor situații practice în limbaj geometric, utilizând configurații spațiale
6.5. Interpretarea informațiilor referitoare la distanțe, arii și volume după modelarea printr-o configurație spațială a unei situații date din cotidian

1 INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN R

Lecția 1. Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor

Noțiuni recapitulative

Matematica poate fi descrisă ca o știință a numerelor, a formelor, a structurilor și a relațiilor dintre acestea.

Noțiunea de număr este esențială în studiul matematicii. Primele numere utilizate de oameni au fost numerele naturale. Cu ajutorul numerelor naturale, putem stabili numărul elementelor unei mulțimi finite sau putem preciza al câtelea loc îl ocupă un obiect într-o succesiune de obiecte.

Numerele naturale se dovedesc insuficiente în procesele de măsurare. De cele mai multe ori, rezultatele măsurătorilor se exprimă sub formă fracționară.

Putem înțelege necesitatea de a extinde succesiv mulțimea de numere în care lucrăm, pornind de la rezolvarea unor ecuații:

- Ecuația $x+a=b$, unde a și b sunt numere naturale, nu are întotdeauna soluție în mulțimea numerelor naturale. De aici, necesitatea introducerii numerelor întregi.
- Ecuația $ax=b$, unde a și b sunt numere întregi cu $a \neq 0$, nu are întotdeauna soluție în mulțimea numerelor întregi. De aici, necesitatea introducerii numerelor raționale.
- Ecuația $x^2=a$, unde a este un număr rațional pozitiv, nu are întotdeauna soluții în mulțimea numerelor raționale. De aici, necesitatea introducerii numerelor reale.

✓ Mulțimea numerelor naturale este:

$$\boxed{\mathbf{N}=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\}}$$

✓ Mulțimea numerelor întregi cuprinde numerele naturale și opusele lor:

$$\boxed{\mathbf{Z}=\{\ldots,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2, 3,\ 4,\ \ldots\}}$$

Orice număr natural este în același timp întreg, deci $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$.

✓ Mulțimea numerelor raționale este mulțimea tuturor numerelor ce se pot scrie sub forma unor rapoarte de numere întregi. Denumirea de număr rațional este legată de cuvântul *“ratio”*, însemnând raport.

Această mulțime se definește astfel:

$$\boxed{\mathbf{Q}=\left\{\left.\frac{m}{n}\ \right|\ m,\ n \in \mathbf{Z},\ n \neq 0\right\}}$$

Din faptul că orice număr întreg n se poate scrie sub forma $\frac{n}{1}$, rezultă că $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$.

Un număr rațional se poate exprima într-o infinitate de moduri sub formă de fracție ordinară și în mod unic sub formă de număr zecimal (fracție zecimală). *De exemplu*, $-\frac{2}{5}=-\frac{4}{10}=-\frac{6}{15}=\ldots=-0,4$.

Transformarea fracțiilor ordinare în fracții zecimale se realizează împărțind numărătorul la numitor. Se obțin fracții zecimale cu un număr finit de zecimale sau cu o infinitate de zecimale care se succed periodic.

De exemplu, $\frac{19}{4}=4,75$; $\frac{13}{7}=1,857142857142\ldots=1,(857142)$; $\frac{17}{6}=2,833\ldots=2,8(3)$.

Reciproc, orice fracție zecimală finită sau periodică se poate transforma în fracție ordinară după regulile cunoscute.

De exemplu, $2,175=\frac{2175}{1000}=\frac{87}{40}$; $2,(175)=2\frac{175}{999}$;

$2,17(5)=2\frac{175-17}{900}=2\frac{79}{450}$; $2,1(75)=2\frac{175-1}{990}=2\frac{29}{165}$.

Deci, mulțimea numerelor raționale poate fi caracterizată și astfel:

Q este mulțimea numerelor zecimale finite sau periodice

✓ Mulțimea numerelor reale

Relațiile metrice în geometrie furnizează exemple de numere care nu pot fi exprimate sub formă de fracție ordinară.

Exemple

1. Dacă măsurăm lungimea unui cerc folosind ca unitate de măsură diametrul cercului, obținem numărul π. S-a demonstrat de către *J. H. Lambert* în anul 1767 că numărul π nu este rațional (nu poate fi exprimat sub forma unui raport de numere întregi). Se pot calcula (utilizând metode neelementare) oricât de multe zecimale ale lui π. Întrucât acest număr este irațional, el se scrie cu o infinitate de zecimale care nu se succed periodic.

Valoarea aproximativă a lui π cu două zecimale exacte (folosită de obicei în calcule) este 3,14. Pentru a memora primele 8 zecimale ale lui π, se poate folosi propoziția:

$$„\underbrace{\text{Așa}}_{3}\ \underbrace{\text{e}}_{1}\ \underbrace{\text{ușor}}_{4}\ \underbrace{\text{a}}_{1}\ \underbrace{\text{scrie}}_{5}\ \underbrace{\text{renumitul}}_{9}\ \underbrace{\text{și}}_{2}\ \underbrace{\text{utilul}}_{6}\ \underbrace{\text{număr}}_{5}“.$$

Scriind cifrele ce arată câte litere conțin cuvintele propoziției considerate, găsim $\pi=3,14159265\ldots$.

2. Lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic isoscel de catetă 1 este $\sqrt{2}$. Folosind metoda reducerii la absurd, demonstrăm că $\sqrt{2}$ nu este număr rațional. Presupunem că $\sqrt{2}$ este număr rațional și notăm cu $\frac{m}{n}$ reprezentantul acestui număr sub formă de fracție ireductibilă, adică avem $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$, unde $m, n \in \mathbf{N}^*$ și $(m,n)=1$. De aici rezultă că $2n^2=m^2$; $2 \mid m^2$ deci $2 \mid m$, prin urmare există $p\in\mathbf{N}$ astfel încât $m == 2p$. Înlocuind în relația $2n^2=m^2$, obținem $2n^2=4p^2$, echivalent cu $n^2=2p^2$. Deducem că $2 \mid n^2$ de unde $2 \mid n$. Faptul că m și n sunt divizibile cu 2 este în contradicție cu presupunerea că m și n sunt prime între ele. Contradicția la care am ajuns dovedește că $\sqrt{2}$ nu este număr rațional.

Definiție

Un număr scris sub formă de fracție zecimală infinită, neperiodică se numește *număr irațional*.

Se poate demonstra prin metoda reducerii la absurd următoarea

Proprietate Dacă n este un număr natural care nu este pătrat perfect, atunci $\sqrt{n}$ este număr irațional.

$\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{10}$; π; $0,121221222122221\ldots$ sunt exemple de numere iraționale.

Definiție

Mulțimea numerelor reale este reuniunea mulțimii numerelor raționale cu mulțimea numerelor iraționale.

Mulțimea numerelor reale se notează cu **R**. Din definiția mulțimii numerelor reale rezultă:

- mulțimea numerelor iraționale este $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$;
- are loc incluziunea $\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

Reține!

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

Se folosește notația $\mathbf{R}^*$ pentru mulțimea numerelor reale nenule (analog notațiilor $\mathbf{N}^*$, $\mathbf{Z}^*$, $\mathbf{Q}^*$, reprezentând respectiv mulțimea numerelor naturale nenule, mulțimea numerelor întregi nenule și mulțimea numerelor raționale nenule).

Comentariu Mulțimea numerelor naturale, mulțimea numerelor întregi, mulțimea numerelor raționale și mulțimea numerelor reale sunt reprezentate și prin simbolurile următoare: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

În continuare vom utiliza ca simboluri pentru aceste mulțimi pe cele folosite în definițiile anterioare.

✓ Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor

Orice submulțime a mulțimii **R** se individualizează prin proprietăți specifice.

Exemple **1.** Mulțimea numerelor reale pozitive notată $\mathbf{R}_+$ se definește astfel:

$$\mathbf{R}_+ = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x \geq 0\}.$$

2. Mulțimea numerelor reale strict negative, notată $\mathbf{R}_-^*$ se definește astfel:

$$\mathbf{R}_-^* = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x < 0\}.$$

3. Mulțimea numerelor reale care sunt soluții ale ecuației $x\sqrt{2} = \sqrt{3}$ se definește astfel:

$$A = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x\sqrt{2} = \sqrt{3}\}.$$

Această mulțime este formată dintr-un singur element, anume $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Deci $A = \left\{\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$.

4. Mulțimea numerelor reale care sunt soluții ale ecuației $x^2 = -2$ se definește astfel:

$$B = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x^2 = -2\}.$$

Deoarece nu există numere reale al căror pătrat este -2, concludem că $B = \varnothing$.

✓ Concluzie

O mulțime A de numere reale ale cărei elemente verifică o proprietate P, o putem reprezenta astfel:

$$A = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x \text{ cu proprietatea } P\}.$$

PROBLEME

1 Fie mulțimea $A = \{-1,5;\ 0;\ \sqrt{2};\ -2;\ 0,(3);\ -\sqrt{9};\ \pi;\ \frac{91}{7};\ \frac{3}{4};\ 1\frac{2}{3};\ \sqrt{6,25}\}$.

Determinați mulțimile următoare:

a) $B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in \mathbf{N}\}$;

b) $C = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in \mathbf{Z}\}$;

c) $D = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in \mathbf{Q}\}$;

d) $E = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}\}$.

2 Scrieți mulțimile de mai jos cu ajutorul unor proprietăți ale elementelor lor:

a) $A = \{0, 1, 4, 9, 16, \ldots\}$; b) $B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\right\}$;

c) $C = \{-1, 1, 2, -2, 5, -5, 10, -10\}$;

d) $D = \{0, 7, 14, 21, \ldots\}$; e) $E = \{-1, 1\}$.

3 Determinați elementele mulțimilor următoare:

a) $A = \{x \mid x \in \mathbf{R}, 2x + 1 = \sqrt{2}\}$;

b) $B = \{x \mid x \in \mathbf{Q}, x^2 = 5\}$;

c) $C = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x^2 \leq 0\}$;

d) $D = \{x \mid x \in \mathbf{R}, |x| = 3\}$.

4 Fie mulțimea

$$M = \left\{\frac{111}{3}; -\sqrt{7};\ 1,0(2);\ \pi;\ \sqrt{16};\ 1-\sqrt{2}\right\}.$$

Determinați mulțimile:

a) $M \cap \mathbf{N}$; b) $M \cap \mathbf{Z}$; c) $M \cap \mathbf{Q}$;

d) $M \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$; e) $A = \{x \in M \mid x \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}\}$;

f) $B = \{x \in M \mid x \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}\}$.

Lecția 2. Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor

✓ Intervale mărginite

Considerăm câteva exemple din viața cotidiană care conduc la noțiunea de interval.

- Valorile normale ale unor indicatori din domeniul sănătății nu sunt fixe, ci oscilează între anumite valori extreme. Astfel, glicemia g (exprimată în *mg*/*dl*) se consideră normală, dacă ia valori cuprinse între 70 și 110, adică $70 \leq g \leq 110$.

Spunem că g ia valori în intervalul mărginit cu extremitățile (capetele) în 70 și 110. Se notează acest interval cu $[70, 110]$. Extremitățile intervalului sunt elemente ale acestuia, adică $70 \in [70, 110]$ și $110 \in [70, 110]$. Spunem că intervalul este închis (vezi *Figura* 1).

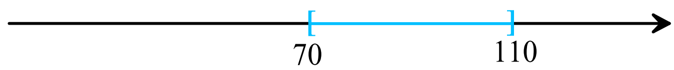


Figura 1

- Dacă măsurăm capacitatea unui vas cu ajutorul unui pahar de un decilitru, obținând 20 de pahare pline și al 21-lea incomplet, atunci avem $20 < c < 21$, unde am notat cu c, capacitatea vasului exprimată în decilitri.

Spunem că numărul real c ia valori într-un interval mărginit cu extremitățile (capetele) în 20 și 21. Pentru a exprima faptul că extremitățile nu sunt elemente ale intervalului, spunem că intervalul este deschis și îl notăm cu $(20, 21)$; (vezi *Figura* 2).

Figura 2

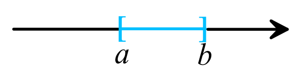
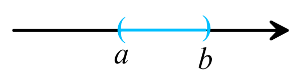
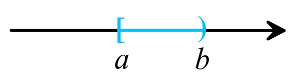
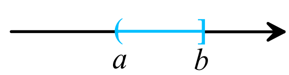
- Pentru a măsura timpul în care un sportiv parcurge o distanță dată, utilizăm un cronometru al cărui ac indică fiecare secundă. Dacă cronometrul indică 35, deducem că timpul t exprimat în secunde verifică relația $35 \leq t < 36$.

Numărul real t ia valori într-un interval mărginit cu extremitățile în 35 și 36, astfel încât extremitatea stângă, 35 aparține intervalului, iar extremitatea dreaptă nu aparține.

Spunem că intervalul este închis la stânga și deschis la dreapta și îl notăm $[35, 36)$; (vezi *Figura* 3).

Figura 3

Definițiile intervalelor mărginite sunt rezumate în tabelul următor, unde $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$:

Mulțimea	Notația	Denumirea	Reprezentarea geometrică
$\{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	Interval închis de extremități a și b	
$\{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$	(a, b)	Interval deschis de extremități a și b	
$\{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$	$[a, b)$	Interval de extremități a și b, închis la stânga și deschis la dreapta	
$\{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$	$(a, b]$	Interval de extremități a și b, deschis la stânga și închis la dreapta	

Observații

1. Definiția poate fi extinsă și pentru cazul când $a = b$.

$$\text{Obținem: } [a,\ a] = \{a\},\ (a, a) = [a,\ a) = (a,\ a] = \varnothing.$$

Acest tip de intervale se mai numesc și intervale degenerate.

2. Intervalele de forma $[a,\ b)$ și $(a,\ b]$ se numesc *intervale semideschise*.
3. Fiecărui interval mărginit îi corespunde un segment pe axa reală.

Notăm cu A punctul de abscisă a și cu B punctul de abscisă b, unde $a < b$.

Intervalului $[a,\ b]$ îi corespunde segmentul închis AB, care își conține capetele.

Intervalului $(a,\ b)$ îi corespunde segmentul deschis AB, care nu-și conține capetele. Intervalului $[a,\ b)$ îi corespunde segmentul AB, care își conține doar capătul din stânga. Intervalului $(a,\ b]$ îi corespunde segmentul AB, care își conține doar capătul din dreapta.

✓ Intervale nemărginite

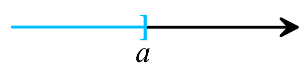
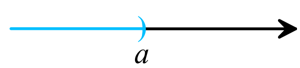
Să considerăm mai întâi două exemple din viața cotidiană care conduc la noțiunea de interval nemărginit.

- În meteorologie o zi caniculară se definește ca fiind ziua în care temperatura la umbră depășește $35\ ^\circ C$, fără a exista un prag maxim impus!

În acest caz spunem că temperatura T ia valori mai mari sau egale ca $35\ ^\circ C$, adică $T \geq 35\ ^\circ C$.

- În mod asemănător pentru zilele geroase, temperatura T verifică condiția $T \leq -10\ ^\circ C$, fără a exista un prag minim impus!

Pentru scrierea intervalelor nemărginite avem nevoie de două simboluri matematice $-\infty$ și $+\infty$. Semnificația acestor simboluri este precizată prin definițiile intervalelor nemărginite din tabelul următor:

Mulțimea	Notația	Denumirea	Reprezentarea geometrică
$\{x \in \mathbf{R} \mid x \geq a\}$	$[a,\ +\infty)$	Interval închis la stânga, nemărginit la dreapta	
$\{x \in \mathbf{R} \mid x > a\}$	$(a, +\infty)$	Interval deschis la stânga, nemărginit la dreapta	
$\{x \in \mathbf{R} \mid x \leq a\}$	$(-\infty,\ a]$	Interval închis la dreapta, nemărginit la stânga	
$\{x \in \mathbf{R} \mid x < a\}$	$(-\infty,\ a)$	Interval deschis la dreapta, nemărginit la stânga	

! **Atenție!** $+\infty$ și $-\infty$ nu sunt numere, ci simboluri matematice.

Observații

1. Uneori, semnul din fața lui $+\infty$ este omis. *De exemplu*, în loc de $(0,\ +\infty)$ se poate scrie $(0,\ \infty)$.
2. Mulțimea numerelor reale poate fi scrisă sub formă de interval: $\mathbf{R} = (-\infty,\ +\infty)$.
3. Fiecărui interval nemărginit îi corespunde o semidreaptă pe axa reală.

Intervalelor de forma $[a, +\infty)$ și $(-\infty,\ a]$ le corespund semidrepte închise, adică semidrepte care își conțin originea. Intervalelor de forma $(a,\ +\infty)$ și $(-\infty,\ a)$ le corespund semidrepte deschise, adică semidrepte care nu-și conțin originea.

✓ Reprezentarea unor intervale folosind aproximarea numerelor reale

- Dacă $I=(\sqrt{2},\sqrt{5})$, atunci pentru reprezentarea lui I pe axa reală folosim aproximări raționale pentru capetele $\sqrt{2}$ și $\sqrt{5}$. Astfel pentru $\sqrt{2}$ putem folosi aproximarea prin lipsă $\sqrt{2}\simeq 1,4$, în timp ce pentru $\sqrt{5}$ folosim aproximarea prin adaos $\sqrt{5}\simeq 2,3$. Atunci reprezentarea lui I este

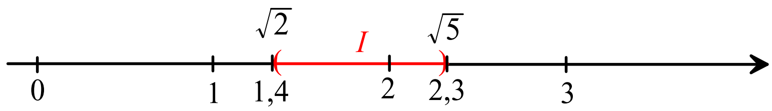


Figura 4

- Dacă $I=(\sqrt{3},\infty)$, atunci aproximând pe $\sqrt{3}$ prin lipsă cu valoarea $\sqrt{3}\simeq 1,7$ reprezentarea lui I este

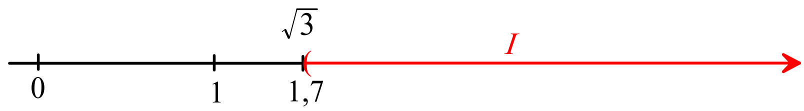


Figura 5

✓ Operații cu intervale

Cu intervalele, fiind reprezentări ale unor mulțimi, se pot efectua operațiile cunoscute: reuniunea și intersecția. Astfel, dacă I și J sunt două intervale, avem:

- Reuniunea intervalelor: $I\cup J=\{x\in \mathbf{R} \mid x\in I \text{ sau } x\in J\}$.
- Intersecția intervalelor: $I\cap J=\{x\in \mathbf{R} \mid x\in I \text{ și } x\in J\}$.

Probleme rezolvate

1 Folosind reprezentarea pe axă, scrieți sub formă mai simplă:

a) $(0,5)\cup(3,7)$; b) $(0,5)\cap(3,7)$.

Soluție

Figura 6

a) $(0,5)\cup(3,7)=(0,7)$; b) $(0,5)\cap(3,7)=(3,5)$.

2 Scrieți sub formă mai simplă:

a) $(-\infty,4]\cup[2,\infty)$; b) $(-\infty,4]\cap[2,\infty)$.

Soluție

Figura 7

a) $(-\infty,4]\cup[2,\infty)=\mathbf{R}$; b) $(-\infty,4]\cap[2,\infty)=[2,4]$.

✓ Caracterizarea unor intervale cu ajutorul modulului

Fie a un număr real, $a>0$. Reprezentăm pe axa reală punctele $A(a)$ și $A'(-a)$. Punctele sunt simetrice față de origine.

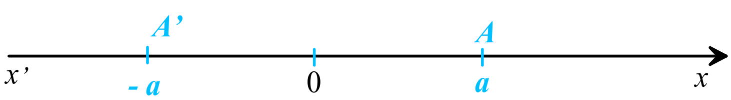


Figura 8

Pentru punctele A și A', distanța la originea axei este egală cu a.
Pentru punctele segmentului deschis AA', distanța față de origine este mai mică (strict) decât a.
Pentru punctele semidreptelor deschise Ax și $A'x'$, distanța față de origine este mai mare (strict) decât a.

Ținând seama că distanța de la origine la un punct de abscisă x este egală cu $|x|$, obținem proprietăți ale modulului, utile în rezolvarea unor ecuații sau inecuații care conțin module.

Reține!

Dacă $a > 0$, avem:

$|x| = a$ echivalent cu $x \in \{-a, a\}$

$|x| \leq a$ echivalent cu $x \in [-a, a]$

$|x| < a$ echivalent cu $x \in (-a, a)$

$|x| \geq a$ echivalent cu $x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$

$|x| > a$ echivalent cu $x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$.

Probleme rezolvate

1 Determinați mulțimile: $A = \{x \mid x \in \mathbf{R}, |2x-3| = 5\}$;
$B = \{x \mid x \in \mathbf{R}, |2x-3| \leq 5\}$; $C = \{x \mid x \in \mathbf{R}, |2x-3| \geq 5\}$.

Soluție $|2x-3| = 5$ echivalent cu $2x-3 = 5$ sau $2x-3 = -5$ echivalent cu $x = 4$ sau $x = -1$. Rezultă $A = \{-1, 4\}$;

$|2x-3| \leq 5$ echivalent cu $2x-3 \in [-5, 5]$, de unde $-5 \leq 2x-3 \leq 5$, deci $-2 \leq 2x \leq 8$ echivalent cu $-1 \leq x \leq 4$. Rezultă $B = [-1, 4]$.

$|2x-3| \geq 5$ echivalent cu $2x-3 \in (-\infty, -5] \cup [5, \infty)$, de unde $2x-3 \in (-\infty, -5]$ sau $2x-3 \in [5, \infty)$.

$2x-3 \in (-\infty, -5]$ echivalent cu $2x-3 \leq -5$, de unde $x \leq -1$ rezultă $x \in (-\infty, -1]$.

$2x-3 \in [5, \infty)$ echivalent cu $2x-3 \geq 5$, de unde $x \geq 4$, deci $x \in [4, \infty)$.
Rezultă $C = (-\infty, -1] \cup [4, \infty)$.

2 Demonstrați că, dacă $x, y \in (8, 10)$, atunci $(x-9)(y-9) \in (-1, 1)$.

Soluție Cum $x \in (8, 10)$, rezultă $8 < x < 10$, deci $-1 < x-9 < 1$ avem $|x-9| < 1$;

Cum $y \in (8, 10)$, rezultă $8 < y < 10$, deci $-1 < y-9 < 1$ avem $|y-9| < 1$.

Înmulțind membru cu membru inegalitățile $|x-9| < 1$ și $|y-9| < 1$ (reamintim că două inegalități cu termeni pozitivi se pot înmulți membru cu membru), obținem $|(x-9)(y-9)| < 1$, adică $(x-9)(y-9) \in (-1, 1)$.

✓ Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real

Considerăm numerele $a = \dfrac{62}{3} = 20\dfrac{2}{3}$, $b = -5$, $c = \sqrt{7} = 2{,}6458\ldots$.

- a are partea întreagă 20 și partea fracționară $\dfrac{2}{3}$;
- b are partea întreagă -5 și partea fracționară 0;
- c are partea întreagă 2 și partea fracționară 0,6458 ...

Pentru orice număr real x, există un interval unic de forma $[n, n+1)$ cu n număr întreg, astfel încât $x \in [n, n+1)$. Numărul întreg n cu această proprietate este partea întreagă a lui x.

Definiție

- *Partea întreagă* a numărului real x este numărul întreg n cu proprietatea $n \le x < n+1$.
- *Partea fracționară* a unui număr este diferența dintre numărul considerat și partea sa întreagă.

Partea întreagă a numărului real x se notează $[x]$, iar partea fracționară a lui x se notează $\{x\}$.

Reține!

$$[x] = n \text{ echivalent cu } n \in \mathbf{Z} \text{ și } n \le x < n+1$$

$$\{x\} = x - [x]$$

Exemplu Dacă $x = -5,43$, atunci, cum $-6 < -5,43 < -5$, obținem $[x] = -6$.
$\{x\} = \{-5,43\} = -5,43 - [-5,43] = -5,43 + 6 = 0,57$.

Problemă rezolvată

Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuațiile:

a) $[x] = 1$; b) $[x] = -2$; c) $[x+1] = 3$; d) $\{x\} = x$.

Soluție

a) $[x] = 1$ echivalent cu $1 \le x < 2$, $S = [1, 2)$;
b) $[x] = -2$ echivalent cu $-2 \le x < -1$, $S = [-2, -1)$;
c) $[x+1] = 3$ echivalent cu $3 \le x+1 < 4$, deci $2 \le x < 3$, $S = [2, 3)$;
d) $\{x\} = x$ echivalent cu $x - [x] = x$, deci $[x] = 0$, de unde $x \in [0, 1)$, $S = [0, 1)$.

PROBLEME

1 Stabiliți valoarea de adevăr a fiecăreia dintre propozițiile: a) $0 \in [-1, 1)$;
b) $2 \in [0, 2)$; c) $\frac{11}{3} \in [3, 4]$;
d) $\frac{1}{3} \notin (0,3; 0,4)$; e) $\sqrt{2} \in [1,4; 1,42)$;
f) $-\sqrt{3} \in (-2; -1]$; g) $-2,(5) \in (-2,6; +\infty)$.

2 Scrieți, sub formă de intervale, mulțimile:
a) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \le x \le 2\}$;
b) $B = \{x \in \mathbf{R} \mid 2 < x < 3\}$;
c) $C = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \le x < 3\}$;
d) $D = \{x \in \mathbf{R} \mid 2 < x \le 4\}$;
e) $E = \{x \in \mathbf{R} \mid x \le 0\}$;
f) $F = \{x \in \mathbf{R} \mid x \ge -2\}$;
g) $G = \{x \in \mathbf{R} \mid x < -\sqrt{2}\}$;
h) $H = \{x \in \mathbf{R} \mid x > \sqrt{3}\}$;
i) $I = \{x \in \mathbf{R} \mid -\frac{3}{2} > x > -\frac{5}{3}\}$;
j) $J = \{x \in \mathbf{R} \mid -x \ge -1\}$.

3 Scrieți, sub formă mai simplă, mulțimile:
a) $(-1, 1) \cup \{-1, 1\}$; b) $(-\infty, 3) \cup [3, \infty)$;
c) $[0, 4] \cup (4, \infty)$; d) $[2, 10] \cap (2, 10)$;
e) $[1, 4] \cap [4, 6]$; f) $(1, 4) \cap (4, 6)$.

4 Scrieți, cu ajutorul intervalelor, mulțimile:
a) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid |x| \le 3\}$; b) $B = \{x \in \mathbf{R} \mid |x| < 4\}$;
c) $C = \{x \in \mathbf{R} \mid |x| \ge 1\}$;
d) $D = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \le x - 1 \le 2\}$;
e) $E = \{x \in \mathbf{R} \mid 2 \le x + 2 \le 4\}$;
f) $F = \{x \in \mathbf{R} \mid 3 \le 3x\}$;
g) $G = \{x \in \mathbf{R} \mid -6 \le 3x + 3 < 9\}$.

5 Scrieți mulțimea numerelor reale care au:
a) partea întreagă egală cu $+3$;
b) partea întreagă egală cu -2;
c) partea întreagă egală cu -1 sau cu 0.

6 Precizați valorile lui $[x]$ în fiecare dintre cazurile:
a) $x \in [3, 4)$; b) $x \in (3, 4)$; c) $x \in (3, 4]$; d) $x \in (-2; 1]$.

7 Reprezentați pe axă intervalele: a) $[-1;2]$;
b) $(1;4]$; c) $(-\infty,-2]$; d) $[-3;4,5)$;
e) $[\sqrt{2},\infty)$; f) $[-1,5;0,(3))$; g) $-[\sqrt{2};\sqrt{2}]$.

8 Dacă $I=[-5,5;4]$; $J=(-5;3]$; $K=[-6,+\infty)$; $L=(-7,5;5)$, care dintre următoarele propoziții sunt adevărate?
a) $I\subset J$; b) $I\subset K$; c) $J\subset K$; d) $J\subset L$; e) $K\supset L$.

9 Precizați câte numere întregi conține fiecare dintre intervalele:
a) $(-5;5)$; b) $[-7;7]$; c) $(-4;4]$;
d) $[7;8)$; e) $(9;10)$; f) $(-3;12]$;
g) $\left[-4;3\frac{1}{2}\right]$; h) $[3,5;4,5)$; i) $(-n;n); n\in\mathbf{N}^*$.

10 Folosind reprezentarea pe axă, scrieți sub formă de intervale următoarele mulțimi:
a) $[2,5]\cup[3,7]$; b) $(-3,0)\cup[0,7]$;
c) $[0,4]\cup(1,\infty)$; d) $[1,7]\cap[2,10]$;
e) $(-\infty,0)\cap(-2,5)$; f) $(2,9)\cap[2,9]$;
g) $[0,4]\cup[1,2]$; h) $(-3,2)\cup[0,5]$;
i) $[1,6]\cup(3,\infty)$; j) $[10,11]\cap[2,10]$;
k) $(-\infty,2)\cap(-2,1)$; l) $(2,3)\cap[2,3]$.

11 Scrieți, cu ajutorul intervalelor, următoarele mulțimi și reprezentați-le pe axa numerelor reale:
$A=\{x\in\mathbf{R}\mid |x|\le 5\}$; $B=\{x\in\mathbf{R}\mid |x|<1\}$;
$C=\{x\in\mathbf{R}\mid |x-2|\le 4\}$;
$D=\{x\in\mathbf{R}\mid |x-1|>3\}$;
$E=\{x\in\mathbf{R}\mid |x|=x\}$; $F=\{x\in\mathbf{R}\mid |x|=-x\}$;
$G=\{x\in\mathbf{R}\mid 1\le|x|<3\}$;
$H=\{x\in\mathbf{R}\mid \sqrt{(x-1)^2}\ge 1\}$.

12 Precizați care dintre mulțimile următoare reprezintă intervale:
a) $[0,2)\cap[1,3]$; b) $[0,1)\cup\left\{\frac{3}{2}\right\}$;
c) $[-2,0]\cap\mathbf{Q}$.

13 Dacă $I_1=[-2,4)$, $I_2=(1,3]$, efectuați:
a) $I_1\cup I_2$; b) $I_1\cap I_2$;
c) $I_2\cap\mathbf{N}$; d) $I_1\cap\mathbf{Z}$.

14 Determinați mulțimile:
a) $A=\{x\in\mathbf{R}\mid |x|\ge 0\}$;
b) $B=\left\{x\in\mathbf{R}\mid |x|=\frac{11}{4}\right\}$;
c) $C=\{x\in\mathbf{R}\mid |x+1|=-2\}$;
d) $D=\{x\in\mathbf{R}\mid [x]=5\}$;
e) $F=\{x\in\mathbf{R}\mid [x+4]=-1\}$;
f) $G=\left\{x\in[1;2]\mid \{x\}=\frac{1}{2}\right\}$;
g) $H=\{x\in[2,3)\mid \{x\}\le 0,5\}$.

15 Dacă $a,b\in\mathbf{R}$ și $a<b$, arătați că:
$$\left(\frac{5a+b}{6};\frac{a+5b}{6}\right)\subset(a;b).$$

16 Fie $I=(0,\infty)$ și $a,b\in I, a<b$. Verificați dacă:
a) $\frac{a+b}{2}\in(a,b)$; b) $\sqrt{ab}\in(a,b)$;
c) $\frac{2ab}{a+b}\in(a,b)$; d) $\frac{a+b\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\in(a,b)$.

17 Precizați câte numere întregi sunt în fiecare dintre intervalele:
a) $(-8,7)$; b) $[-9,9]$; c) $(-n,n)$, $n\in\mathbf{N}^*$;
d) $[-n,n)$, $n\in\mathbf{N}^*$; e) $[n,n+p]$, $n,p\in\mathbf{N}$;
f) $[n,n+\sqrt{29}]$, $n\in\mathbf{Z}$; g) $[n,n+1]$, $n\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$.

18 Dacă $a,b\in\mathbf{R}$, $a<b$, demonstrați că:
a) $\frac{2a+b}{3}\in(a,b)$; b) $3a+5b\in(8a,8b)$.

19 Pentru a nu uita parola de la adresa de e-mail, Bogdan a ales-o în felul următor:
a) este formată din șapte cifre scrise în ordine descrescătoare;
b) fiecare cifră este element al mulțimii
$\{x\in\mathbf{R}\mid |x-3|<4\}$.
Care este parola lui Bogdan ?

20 O persoană dorește să cumpere un teren dreptunghiular cu lățimea de 20 m, cu cel mult 15000 euro. Prețul terenului este de 10 euro/m^2 și proprietarul nu vinde mai puțin de 500 m^2. În ce interval poate lua valori lungimea terenului pe care vrea să îl cumpere persoana respectivă ?

21 Pe cele două laturi ale unei alei, lungă de 340 m se plantează brazi. Intervalul dintre doi brazi consecutivi variază între 8 m și 9 m. Arătați că numărul de brazi plantați aparține intervalului [37; 42].

Lecția 3. Inecuații de forma $ax + b \geq 0$ ($\leqslant, <, >$), unde $a, b \in \mathbf{R}$

Noțiuni recapitulative

În clasa a VII-a ați învățat cum se compară două numere reale. În tabelul următor (în care, cu a, b, c, d, am notat numerele reale), sistematizăm proprietățile relației „ $\leq$”.

1)	$a \leq a$ pentru orice $a \in \mathbf{R}$.	Relația „$\leq$” este reflexivă.
2)	Dacă $a \leq b$ și $b \leq a$, atunci $a = b$.	Relația „$\leq$” este antisimetrică.
3)	Dacă $a \leq b$ și $b \leq c$, atunci $a \leq c$.	Relația „$\leq$” este tranzitivă.
4)	Dacă $a \leq b$, atunci $a + c \leq b + c$ și reciproc. Dacă $a \leq b$, atunci $a - c \leq b - c$ și reciproc.	Dacă adunăm sau scădem în ambii membri ai unei inegalități același număr, obținem o inegalitate echivalentă cu cea dată păstrând semnul inegalității.
5)	Fie $c > 0$. Avem: Dacă $a \leq b$, atunci $ac \leq bc$ și reciproc. Dacă $a \leq b$, atunci $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$ și reciproc.	Dacă înmulțim sau împărțim ambii membri ai unei inegalități cu același număr strict pozitiv, obținem o inegalitate echivalentă cu cea dată, păstrând semnul inegalității.
6)	Fie $c < 0$. Avem: Dacă $a \leq b$, atunci $ac \geq bc$ și reciproc. Dacă $a \leq b$, atunci $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$ și reciproc.	Dacă înmulțim sau împărțim ambii membri ai unei inegalități cu același număr strict negativ, obținem o inegalitate echivalentă cu cea dată, schimbând semnul „$\leq$” cu semnul „$\geq$”.

Deoarece $a \leq b$ este echivalent cu $b \geq a$, proprietățile relației „$\geq$” se deduc imediat din cele de mai sus.

Relațiile „$\leq$” și „$\geq$” sunt relații de inegalitate nestrictă. Relațiile „$<$” și „$>$” sunt relații de inegalitate strictă.

Avem $a < b$ dacă și numai dacă $a \leq b$ și $a \neq b$; de asemenea, $a < b$ dacă și numai dacă $b > a$. Deducem că relațiile de inegalitate strictă au proprietăți asemănătoare proprietăților 3), 4), 5), 6) din tabelul anterior.

✓ Rezolvarea în mulțimea numerelor reale a inecuațiilor de forma $ax + b > 0$ ($<, \leqslant, \geq$), unde $a, b \in \mathbf{R}$

Definiție

Relațiile de tipul $ax + b > 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$, unde a, b sunt numere reale date se numesc *inecuații* cu necunoscuta x.

- Pentru rezolvarea unei inecuații este necesar să știm mulțimea $D \subset \mathbf{R}$ în care se poate afla necunoscuta x.
- A rezolva o inecuație de forma celor din definiție înseamnă a determina toate valorile necunoscutei x din D care verifică inegalitatea dată de inecuație, (înlocuite în inecuație conduc la propoziții adevărate). Aceste valori ale necunoscutei x din D poartă denumirea de soluții ale inecuației date.
- Notăm cu S mulțimea soluțiilor din D ale inecuației.

Definiție

Două inecuații cu aceeași mulțime S a soluțiilor se numesc inecuații echivalente.

! **Atenție!** Două inecuații echivalente se obțin una din cealaltă prin aplicarea proprietăților relației de inegalitate în mulțimea numerelor reale.

Rezolvarea se realizează scriind inecuația succesiv sub forme echivalente (inecuații care au aceeași mulțime a soluțiilor). Din tabelul cu proprietăți ale relației $<$, $\leq$, $>$, $\geq$ rezultă:

- Dacă într-o inecuație trecem un termen dintr-un membru în celălalt schimbându-i semnul, obținem o inecuație echivalentă cu cea dată.
- Dacă într-o inecuație înmulțim sau împărțim ambii membri cu același număr strict pozitiv, se obține o inecuație echivalentă cu cea dată.
- Dacă într-o inecuație înmulțim sau împărțim ambii membri cu acelaşi număr strict negativ schimbând semnul inegalității (adică se schimbă „$<$" în „$>$", „$>$" în „$<$", „$\leq$" în „$\geq$", „$\geq$" în „$\leq$") , se obține o inecuație echivalentă cu cea dată.

Algoritmul rezolvării unei inecuații de forma $ax + b > 0$, unde $a, b \in \mathbf{R}$

Pentru rezolvarea unei inecuații de forma $ax+b>0(\geq,<,\leq)$ este necesar să cunoaștem mulțimea D, în care se poate afla necunoscuta x.

Notăm cu S, mulțimea soluțiilor din D ale inecuației, adică mulțimea valorilor lui $x \in D$, care înlocuite în inecuație conduc la propoziții adevărate.

Rezolvarea în $\mathbf{R}$ a inecuației $ax+b>0$ constă în următoarele etape:

Pasul I

- Adunăm în ambii membri $-b$ și obținem inegalitatea echivalentă $ax>-b$.

Pasul II

- Dacă $a>0$, împărțind prin a, obținem $x>-\frac{b}{a}$, deci $S=\left\{x \in \mathbf{R} \mid x>-\frac{b}{a}\right\}=\left(-\frac{b}{a},\infty\right)$.
- Dacă $a<0$, împărțind prin a, obținem $x<-\frac{b}{a}$, deci $S=\left\{x \in \mathbf{R} \mid x<-\frac{b}{a}\right\}=\left(-\infty,-\frac{b}{a}\right)$.
- Dacă $a=0$ și $b>0$, propoziția $0\cdot x+b>0$ este adevărată pentru orice $x \in \mathbf{R}$, deci $S=\mathbf{R}$.
- Dacă $a=0$ și $b<0$, propoziția $0\cdot x+b>0$ este falsă pentru orice $x \in \mathbf{R}$, deci $S=\varnothing$.

Observații

1. Pentru a determina mulțimea $\left\{x \in \mathbf{Z} \middle| x>-\frac{b}{a}\right\}$ sau mulțimea $\left\{x \in \mathbf{Z} \middle| x<-\frac{b}{a}\right\}$ este util să încadrăm numărul $-\frac{b}{a}$ între doi întregi consecutivi și să folosim reprezentarea pe axă.

2. Inecuațiile de forma $ax+b\geq 0$ $(<, \leq)$ se rezolvă în mod asemănător.

3. În cazul în care inecuația se cere a fi rezolvată în D, pentru determinarea soluției finale vom intersecta soluția obținută ca în algoritm cu mulțimea D.

✓ Inecuații de tipul $\frac{a}{bx+c}<0$ $(>, \leq, \geq)$, unde $a, b \in \mathbf{R}^*$, $c \in \mathbf{R}$

Ținând cont de semnul unei fracții, pentru a rezolva o inecuație de forma $\frac{a}{bx+c}<0$, unde $a,b \in \mathbf{R}^*$, $c \in \mathbf{R}$ deosebim două cazuri.

Cazul I

- Dacă $a>0$, atunci inecuația este echivalentă (are aceleași soluții) cu inecuația $bx+c<0$, a cărei rezolvare a fost studiată anterior.

Cazul II

- Dacă $a<0$, atunci inecuația este echivalentă cu inecuația $bx+c>0$, inecuație studiată anterior.

Observație

1. Inegalitatea de forma $\frac{a}{bx+c} \leq 0$, unde $a, b \in \mathbf{R}^*$ și $c \in \mathbf{R}$ este echivalentă cu inecuația $\frac{a}{bx+c} < 0$.
2. În mod analog se rezolvă inecuațiile de forma $\frac{a}{bx+c} > 0$ și $\frac{a}{bx+c} \geq 0$, unde $a, b \in \mathbf{R}^*$ și $c \in \mathbf{R}$.

Probleme rezolvate

1 Rezolvați în $\mathbf{Z}$ și $\mathbf{R}$ inecuațiile: a) $-2x+\sqrt{2} < 0$; b) $\frac{x}{\sqrt{3}} - x\sqrt{3} > 4$;

Soluție a) $-2x+\sqrt{2} < 0$ echivalent cu $-2x < -\sqrt{2}$ echivalent cu $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Cum $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, obținem $S = \left\{x \in \mathbf{Z} \,\middle|\, x > \frac{\sqrt{2}}{2}\right\} = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbf{N}^*$ (vezi *Figura* 9).

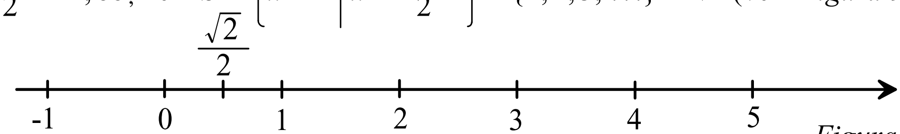


Figura 9

În mulțimea $\mathbf{R}$ soluția inecuației este: $S = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$.

b) $\frac{x}{\sqrt{3}} - x\sqrt{3} > 4$ echivalent cu $x - 3x > 4\sqrt{3}$ echivalent cu $-2x > 4\sqrt{3}$ echivalent cu $x < -2\sqrt{3}$. Calculând o valoare aproximativă a lui $-2\sqrt{3}$, arătăm că $-4 < -2\sqrt{3} < -3$, deci $S = \{x \in \mathbf{Z} \mid x < -2\sqrt{3}\} = \{-4, -5, -6, \ldots\}$.

În mulțimea $\mathbf{R}$ soluția inecuației este $S = (-\infty, -2\sqrt{3})$.

2 Fie inecuația $ax + b \leq 0$.

a) Rezolvați în $\mathbf{R}$ inecuația pentru $a = -\frac{1}{2}$ și $b = 1$;

b) Aflați $a \in \mathbf{R}$, știind că $b = -2$, iar mulțimea soluțiilor inecuației este $\mathbf{R}$.

Soluție a) $-\frac{1}{2}x + 1 \leq 0$, echivalent cu $-\frac{1}{2}x \leq -1$, echivalent cu $x \geq 2$. Rezultă $S = [2, \infty)$.

b) Dacă $a > 0$, atunci $ax - 2 \leq 0$, echivalent cu $ax \leq 2$, echivalent cu $x \leq \frac{2}{a}$, de unde $S = \left(-\infty, \frac{2}{a}\right] \neq \mathbf{R}$.

Prin urmare, $a \leq 0$. Dacă $a < 0$, atunci $ax - 2 \leq 0$, echivalent cu $ax \leq 2$, echivalent cu $x \geq \frac{2}{a}$.

Deci $S = \left[\frac{2}{a}, +\infty\right) \neq \mathbf{R}$.

În consecință $a \notin (-\infty, 0)$. Deci $a = 0$. Într-adevăr, inecuația $0 \cdot x - 2 \leq 0$ are ca mulțime a soluțiilor $S = \mathbf{R}$.

3 Aflați mulțimea numerelor reale cu proprietatea $\left|\frac{1-2x}{3}\right| \leq \frac{1}{2}$.

Soluție Folosim o proprietate a modulului: $-\frac{1}{2} \leq \frac{1-2x}{3} \leq \frac{1}{2}$. Înmulțim relația cu 6 obținem: $-3 \leq 2 - 4x \leq 3$.

Adunăm -2 și obținem: $-5 \leq -4x \leq 1$. Împărțim prin -4 avem: $\frac{5}{4} \geq x \geq -\frac{1}{4}$.

Ultima relație este echivalentă cu $-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}$, deci $x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right]$.

4 Rezolvați în $\mathbf{Z}$, respectiv $\mathbf{R}$, inecuațiile:

a) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}x+1} < 0$; b) $\frac{5}{x-\sqrt{3}} \leq 0$; c) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-\sqrt{5}x+1} > 0$; d) $\frac{\pi-3}{-x+\sqrt{3}} \geq 0$.

Soluție a) Cum $\sqrt{2} - 1 > 0$, inecuația devine $\sqrt{3}x + 1 < 0$, de unde $x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$, (1).

Deoarece $\frac{\sqrt{3}}{3} \in (0, 1)$, rezultă $0 > -\frac{\sqrt{3}}{3} > -1$ și atunci soluția în $\mathbf{Z}$ este $S = \{\ldots, -3, -2, -1\}$. În $\mathbf{R}$, ținând cont de (1), soluția este $S = \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

b) Deoarece $5>0$, inecuația este echivalentă cu $x-\sqrt{3}<0$, adică $x<\sqrt{3}$ (2). Deoarece $1<\sqrt{3}<2$, soluția în **Z** a inecuației este $S=\{\ldots, -1, 0, 1\}$. În **R** inecuația (2) are soluția $S=(-\infty, \sqrt{3})$.

c) Întrucât $\sqrt{2}-\sqrt{3}<0$, inecuația este echivalentă cu $-\sqrt{5}x+1<0$, adică $-\sqrt{5}x<-1$, de unde obținem $x>\frac{\sqrt{5}}{5}$, (3). Deoarece $0<\frac{\sqrt{5}}{5}<1$, soluția în **Z** a inecuației este $S=\{1, 2, 3, \ldots\}$.

În **R** inecuația (3) are soluția $S=\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \infty\right)$.

d) Avem $\pi-3>0$ și atunci $-x+\sqrt{3}>0$, de unde $-x>-\sqrt{3}$, adică $x<\sqrt{3}$, (4).
Cum $1<\sqrt{3}<2$, obținem în **Z** soluția inecuației $S=\{\ldots, -1, 0, 1\}$.
Inecuația (4) are în **R** soluția $S=(-\infty, \sqrt{3})$.

PROBLEME

1 Fie $A=\{-3; 5; 2009; -14; 0; 25; -2025; 49\}$. Precizați care dintre elementele mulțimii A sunt soluții ale inecuațiilor:
a) $7x<21$; b) $3x+5<14$; c) $-2x+3\geq\frac{11}{3}$;
d) $-\frac{3}{2}x+1\leq 7,5$; e) $\frac{x}{3}+4>1,1(6)$; f) $2x<\sqrt{2}$.

2 Reprezentați pe axa numerelor mulțimea soluțiilor reale pentru fiecare dintre inecuațiile:
a) $x\leq -4$; b) $2x\leq -18$; c) $-2x\leq 6$; d) $4-2x\leq 6$.

3 Rezolvați în **N** inecuațiile:
a) $3x+12\leq 2x-3$; b) $3x+6>6x-2$;
c) $-5(x-2)\leq -4(x-7)+1$; d) $3x-\frac{x}{2}\leq\frac{1-x}{-3}$.

4 Rezolvați în **Z** inecuațiile: a) $2x<4$;
b) $-4x\geq 8$; c) $x+3\leq 10$; d) $2x+2\geq\frac{5}{3}$;
e) $-2x-\frac{3}{4}\geq x-\frac{1}{2}$; f) $4x+2\geq -x+7$.

5 Rezolvați în **R** inecuațiile:
a) $2x+9\leq 5x+4$; b) $3x+5>6x+1$;
c) $3(x+4)-2(x+1)\leq 2(x-5)-1$;
d) $|x-3|\leq 4$; e) $\sqrt{3}x-3\leq 3x-\sqrt{3}$;
f) $(\sqrt{2}-2)x\geq\sqrt{2}-2$; g) $\frac{7x-4}{-2}>2x-7$.

6 Aflați mulțimea valorilor reale ale lui x cu proprietatea:
a) $\frac{2x-3}{5}\in(-\infty, 7)$;
b) $\frac{1-10x}{3}\in[-13, \infty)$; c) $\frac{4-9x}{2}\in[-7, 2]$.

7 Rezolvați în **Z** și **R** inecuațiile: a) $x+7<10$;
b) $-x+2>\frac{1}{2}$; c) $2x-3>0$; d) $\frac{3}{2}x+1\frac{1}{4}\geq 0$;
e) $4,1x+1,5\leq 7,17$; f) $2x+3<5x-2$;
g) $-5x+1,(2)<7,1(6)$; h) $-x<\sqrt{10}$.

8 Pentru fiecare dintre inecuațiile de mai jos precizați trei numere întregi, soluții ale inecuației:
a) $7x-1\geq 0$; b) $2x+1\leq -5$;
c) $-\frac{7}{3}x+2\geq 4,5$; d) $\frac{x}{2}+3\frac{1}{4}\leq -5,25$.

9 Rezolvați în **R** inecuațiile: a) $\frac{x+1}{3}<0$;
b) $\frac{2x-1}{5}\geq 0$; c) $\frac{3x-7}{9}\leq 0$; d) $\frac{x-3}{5}\leq 2$;
e) $\frac{2x-3}{4}+\frac{x-1}{2}\leq 0$; f) $\frac{4x+1}{5}\geq\frac{2x-1}{3}$;
g) $\frac{5x+3}{4}\geq\frac{10x+1}{8}$; h) $\frac{3x-4}{7}<\frac{6x-9}{14}$;
i) $\frac{x+1}{3}+\frac{7x-1}{5}>\frac{2x-1}{10}+\frac{5}{6}$; j) $\frac{3x-14}{2009}>0$;
k) $\frac{x+1}{3}+\frac{7x-3}{12}>\frac{1}{2}$; l) $\frac{6x-1}{2}+\frac{4x+1}{3}\leq\frac{7}{6}$.

10 Rezolvați în **Z** și apoi în **N** inecuațiile:
a) $x<\sqrt{2}$; b) $-2x>-\sqrt{7}$;
c) $x+1\leq\sqrt{15}$; d) $x\sqrt{2}\geq 4$.

11 Aflați:
a) cel mai mic număr întreg care verifică inecuația $\frac{x}{-3}<\frac{x+1}{2}$;
b) cel mai mare număr întreg care verifică inecuația $2(x+3)\leq\frac{x-10}{-2}$.

12 Rezolvați în **Z** inecuațiile:

a) $3x+1<0$; b) $2x-7\geq 0$;
c) $-5x-3<0$; d) $\frac{7}{3}x\leq 9$;
e) $\frac{x+5}{2}-\frac{2x-7}{6}\geq 0,1(6)\cdot x+\frac{1}{2}$.

13 Rezolvați în **R** inecuațiile:

a) $5x-\frac{1}{4}\leq 0$; b) $\frac{15}{7}x-\frac{1}{12}\geq\frac{7}{4}$;
c) $-2,5x+3\frac{1}{2}\leq 7\frac{1}{3}$; d) $-0,(6)x+\frac{1}{3}\geq\frac{5}{6}$;
e) $2x\sqrt{3}-\sqrt{147}>0$; f) $3x\sqrt{5}\leq\sqrt{80}$;
g) $x\sqrt{2}<2$; h) $x\sqrt{3}>12$.

14 Rezolvați în **R** inecuațiile:

a) $\frac{2x+5}{2}<\frac{5x+7}{3}$; b) $\frac{-x+1}{3}>\frac{7x+8}{2}+1$;
c) $\frac{2x+5}{2}<\frac{5x}{3}+1$; d) $\frac{5x-3}{2}<\frac{6x+9}{4}+3$;
e) $\frac{3x+2}{12}-7\leq\frac{2x+7}{2}$;
f) $\frac{7x+12}{3}>4x+4\frac{1}{5}$;
g) $\frac{x+2}{2}+\frac{x+3}{3}\geq\frac{x+4}{6}$;
h) $\frac{2x+5}{5}-\frac{3x+5}{3}<\frac{6x+11}{15}$;
i) $\frac{7x+9}{6}>\frac{x+3}{3}-\frac{x}{2}$;
j) $\frac{4x+7}{16}-\frac{x+6}{4}\leq\frac{x+5}{5}$;
k) $\frac{3x-4}{2}-\frac{x+5}{8}>-\frac{2x+5}{4}$;
l) $\frac{6x+9}{5}-\frac{2x+9}{4}\leq\frac{3x+12}{10}$.

15 Rezolvați în **R** inecuațiile:

a) $x\sqrt{2}+2\leq 2x+\sqrt{2}$;
b) $x\sqrt{3}-2\sqrt{5}\geq x\sqrt{5}-2\sqrt{3}$;
c) $(\sqrt{3}-1)x-3\leq 2x(\sqrt{3}+1)-3\sqrt{3}$.

16 Rezolvați în **R** inecuațiile:

a) $|2x-1|\leq 5$; b) $\left|\frac{2x+1}{3}\right|<1$;
c) $\left|\frac{3x-1}{2}-1\right|\leq 6$; d) $\left|x-\frac{x-1}{2}\right|<7$.

17 Fie $x\in\mathbf{R}$.

a) Dacă $x+2\in[-2,1)$, atunci $x\in\ldots$
b) Dacă $x-2\in(-\infty,3]$, atunci $x\in\ldots$
c) Dacă $-2x+3\in(2,+\infty)$, atunci $x\in\ldots$

18 Rezolvați în **R** inecuațiile:

a) $\frac{3}{x+2}>0$; b) $\frac{-5}{-x+3}\geq 0$;
c) $\frac{\sqrt{3}-\pi}{x\sqrt{2}+\pi}<0$; d) $\frac{2-\sqrt{5}}{3x-2\sqrt{2}}\leq 0$.

19 Rezolvați în **R** inecuațiile:

a) $\frac{3-\sqrt{5}}{3x\sqrt{5}-\sqrt{80}}\leq 0$; b) $\frac{2-\sqrt{2}}{x\sqrt{2}-2}>0$;
c) $\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{x\sqrt{3}-12}<0$; d) $\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-x\sqrt{5}}\geq 0$.

20 Determinați elementele mulțimilor:

$A=\{x\in\mathbf{N}\mid 2-x\geq -5\}$;
$B=\left\{x\in\mathbf{N}^*\mid \frac{3-x}{-2}\leq 1\right\}$;
$C=\left\{x\in\mathbf{R}\mid \frac{2x-1}{-3}<x\right\}$;
$D=\left\{x\in\mathbf{N}^*\mid \frac{3-7x}{-2}\leq 1\right\}$;
$E=\{x\in\mathbf{N}\mid -\sqrt{2x}\geq -2\}$;
$F=\{x\in\mathbf{Z}\mid 2x>-5 \text{ și } |x|=-x\}$.

21 Fie inecuația $-2x+3\geq -7$.

a) Rezolvând în $\mathbf{N}^*$, mulțimea soluțiilor este . . .
b) Rezolvând în **R**, mulțimea soluțiilor este . . .
c) Cel mai mare număr întreg negativ care verifică inecuația este . . .

22 Fie inecuația $|x|\leq 3$.

a) Rezolvând în **N**, mulțimea soluțiilor este . . .
b) Rezolvând în **Z**, mulțimea soluțiilor este . . .
c) Rezolvând în **R**, mulțimea soluțiilor este . . .

23 Fie inecuația $|x+3|\leq 1$.

a) Rezolvând în **Z**, mulțimea soluțiilor este . . .
b) Rezolvând în **R**, mulțimea soluțiilor este . . .
c) Rezolvând în **N**, mulțimea soluțiilor este . . .

24 a) Rezolvând în **R** inecuația $\sqrt{2}x\leq 2\sqrt{2}$, mulțimea soluțiilor este . . .

b) Rezolvând în **N** inecuația $\frac{3}{2}x-1\leq 2$, mulțimea soluțiilor este . . .

c) Rezolvând în mulțimea numerelor întregi negative inecuația $2\sqrt{3}+\sqrt{3}\geq -3\sqrt{3}$, mulțimea soluțiilor este . . .

Lecția 4. Rezolvarea unor probleme cu ajutorul inecuațiilor

Etapele rezolvării unei probleme cu ajutorul inecuațiilor de forma $ax+b \geq 0$ sunt:

- Stabilirea necunoscutei și notarea acesteia cu o literă.
- Stabilirea legăturilor dintre datele cunoscute și necunoscute și formarea inecuației, stabilirea domeniului în care se rezolvă inecuația.
- Rezolvarea inecuației.
- Interpretarea rezultatului și stabilirea soluției.

Probleme rezolvate

1 Care este cel mai mare număr natural de patru cifre care dă restul 25 prin împărțire la 30?

Soluție Numărul căutat este de forma $30x+25, x \in \mathbf{N}$ și este cel mai mare care verifică relația $30x+25 < 10\,000$, deci rezolvarea problemei se reduce la determinarea celei mai mari soluții întregi a inecuației de mai sus. Obținem $30x < 9975$ adică $x < 332,5$. Cea mai mare soluție întreagă este 332, deci numărul căutat este $30 \cdot 332 + 25 = 9985$.

2 La împărțirea a două numere naturale nenule, câtul este mai mic decât împărțitorul cu 5 și mai mic decât restul de 4 ori. Ce valori poate lua deîmpărțitul?

Soluție Notăm câtul împărțirii cu x. Atunci, împărțitorul este $x+5$, iar restul este $4x$. Exprimând faptul că restul este strict mai mic decât împărțitorul, obținem inecuația $4x < x+5$, având mulțimea de soluții $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$. Cum $x \in \mathbf{N}$, rezultă $x \in \{0, 1\}$.

Dacă x ar fi egal cu 0, atunci împărțitorul ar fi 5, și restul ar fi 0, deci s-ar obține deîmpărțitul $0 \cdot 5 + 0 = 0$, *contradicție*!

Deci $x = 1$; împărțitorul este 6, restul este 4, iar deîmpărțitul este $1 \cdot 6 + 4 = 10$.

3 Ana a citit o carte în 5 zile, astfel: în fiecare zi, începând cu a doua zi, a citit mai mult decât în ziua precedentă cu același număr de pagini; în primele trei zile a citit jumătate din carte, iar în a patra zi a citit mai mult de 30 de pagini, dar mai puțin de 40. Câte pagini are cartea?

Soluție Notăm cu x numărul de pagini citite în prima zi și cu y diferența dintre numărul de pagini citite într-o zi față de ziua precedentă. Deci, în cele 5 zile a citit: x, $x+y$, $x+2y$, $x+3y$, $x+4y$.

Avem $x+x+y+x+2y = \frac{1}{2}(x+x+y+2y+x+x+3y+x+4y)$, de unde $x = 4y$. În a patra zi a citit $x+3y = 7y$.

Din $30 < 7y < 40$, cum y este număr natural, rezultă că $y = 5$, deci $x = 20$.

4 Un triunghi ABC are perimetrul de 20 cm și $AC = 2 \cdot AB$.

a) Determinați intervalul în care ia valori BC.

b) Aflați lungimile laturilor în cazul în care sunt exprimate în centimetri prin numere întregi.

Soluție a) Notăm $BC = x$ și $AB = y$, deci avem $AC = 2y$ și $x+y+2y = 20$, de unde $y = \frac{20-x}{3}$.

Numerele pozitive x, y și $2y$ formează un triunghi dacă și numai dacă oricare dintre ele este mai mic (strict) decât suma celorlalte două.

$x < 3y$ echivalent cu $x < 3 \cdot \frac{20-x}{3}$, de unde $x < 20-x$, adică $2x < 20$. Obținem $x < 10$.

$y < x+2y$ echivalent cu $0 < x+y$, ceea ce este adevărat pentru x, y pozitive.

$2y < x+y$ echivalent cu $y < x$. Avem $\frac{20-x}{3} < x$, de unde $20-x < 3x$, adică $-4x < -20$. Obținem $x > 5$.

Avem $5 < x < 10$, deci $x \in (5, 10)$.

b) $(5,10)\cap \mathbf{N}=\{6, 7, 8, 9\}$.

Pentru $x=6, y=\frac{20-6}{3}=\frac{14}{3}\notin \mathbf{N}$.

Pentru $x=7, y=\frac{20-7}{3}=\frac{13}{3}\notin \mathbf{N}$.

Pentru $x=8, y=\frac{20-8}{3}=4\in \mathbf{N}$.

Pentru $x=9, y=\frac{20-9}{3}=\frac{11}{3}\notin \mathbf{N}$.

Deci, soluția este $BC=8\,\text{cm}$, $AC=4\,\text{cm}$, $AB=8\,\text{cm}$.

PROBLEME

1 Determinați cel mai mic număr natural al cărui triplu, mărit cu $76,23$, depășește $115,5$.

2 Care este cel mai mic număr natural de patru cifre al cărui succesor este un multiplu de 17?

3 Aflați ce valori întregi pot avea dimensiunile unei grădini în formă de dreptunghi, știind că aria acesteia este cel mult egală cu $28\,\text{cm}^2$, iar lungimea este dublul lățimii.

4 Suma vârstelor lui Alin, Daniel și Cosmin este mai mică decât 14. Vârsta lui Cosmin este dublul vârstei lui Alin, iar Daniel este cu 3 ani mai mic decât Alin. Aflați vârstele celor trei copii (exprimate prin numere naturale nenule).

5 O sumă de bani mai mică decât 100 lei este plătită în bancnote de 1 leu, 5 lei și 10 lei, numărul bancnotelor de 1 leu fiind egal cu cel al bancnotelor de 5 lei și reprezentând $\frac{1}{6}$ din numărul bancnotelor de 10 lei. Aflați suma.

6 Aflați trei numere naturale nenule, știind următoarele: dacă se împarte al doilea număr la primul, se obține câtul 1 și restul 0, dacă se împarte al treilea număr la al doilea se obține câtul 5 și restul 2, iar suma celor trei numere este mai mică decât 55.

7 După ce a cheltuit două treimi din suma pe care o avea și încă 8 lei, apoi a cheltuit jumătate din suma rămasă, Daniel a constatat că i-au rămas mai puțin de 10 lei. Ce se poate afirma despre suma cu care a plecat Daniel la cumpărături?

8 Un turist a parcurs un traseu astfel: în prima zi 25% din traseu, a doua zi două treimi din rest, rămânându-i pentru a treia zi mai puțin de 12 km. Evaluați lungimea traseului.

9 Lățimea unui dreptunghi este cu 3 cm mai mică decât $\frac{3}{5}$ din lungime, iar perimetrul este mai mic decât 90 cm. Precizați intervalul în care se găsește lungimea dreptunghiului.

10 Un număr real se adună cu 14, apoi $\frac{2}{3}$ din suma obținută se adună cu dublul opusului numărului considerat. Din rezultat se scade 55 și se obține un rezultat care nu depășește 101. Precizați intervalul în care se află numărul necunoscut.
Puteți preciza valoarea maximă a numărului necunoscut? Dar valoarea minimă?

11 O cutie conține bile albe și negre, cele albe fiind cu 6 mai multe decât cele negre, iar probabilitatea ca la o extragere să se obțină bilă albă depășește $\frac{3}{5}$. Aflați numărul maxim al bilelor din cutie.

12 Într-un parc auto sunt 30 de autobuze și microbuze. Un autobuz poate transporta 50 de persoane, iar un microbuz 20 de persoane. Care este numărul minim de autobuze din parcul auto pentru a putea transporta 1000 de persoane, știind că fiecare mijloc de transport face o singură deplasare?

13 Aflați trei numere naturale nenule știind următoarele: dacă se împarte al doilea număr la primul, se obține câtul 3 și restul 3, dacă se împarte al treilea număr la al doilea se obține câtul 5 și restul 2 iar suma celor trei numere este mai mică decât 55.

TEME DE SINTEZĂ

Recomandate pentru lucru în echipe

1 Într-un vas sunt 5 l de apă la temperatura de 12 °C. Până la ce temperatură trebuie încălziți 3 l de apă, astfel încât, făcând un amestec cu apa din vas să se obțină apa la temperatura de cel mult 25 °C ?

2 Se amestecă 10 g de soluție de sare cu concentrația de 20 % cu 10 g de soluție cu altă concentrație. Ce concentrație trebuie să aibă a doua soluție astfel încât să se obțină un amestec cu concentrația cuprinsă între 25 % și 30 % ?

3 Un triunghi ABC are laturile exprimate prin numere naturale, astfel $AB=x-9$, $AC=x+1$ și $BC=x$ cm. Aflați laturile triunghiului ABC astfel încât perimetrul acestuia să fie mai mic de 25 cm.

PROBLEME RECAPITULATIVE

Recomandate pentru portofoliu personal

1 Care este cel mai mare număr întreg care mărit cu 5, 5 nu depășește $\sqrt{10}$?

2 Aflați probabilitatea ca, dacă luăm la întâmplare un număr natural de două cifre, acesta să aparțină intervalului $[\sqrt{85}, \sqrt{850}]$.

3 Aflați probabilitatea ca, dacă luăm la întâmplare un număr din mulțimea $A=\{\sqrt{n} \mid n\in \mathbf{N}, n\le 100\}$, acesta să fie: a) număr rațional; b) număr irațional; c) mai mare sau egal cu 5.

4 Dacă $a\in(1,3)$, precizați intervalele în care se găsesc numerele $a+2$, $2a$, $a-4$ și $-a$.

5 Fie a și b două numere reale. Știind că $a\in[25, 30]$ și $b\in[10,17]$, precizați care dintre numerele următoare poate reprezenta produsul dintre a și b.

A. 221; **B.** 100π; **C.** 511; **D.** 24^2.

6 Fie x și y două numere reale pozitive. Știind că partea întreagă a lui x are 4 cifre, iar partea întreagă a lui y are 3 cifre, precizați care dintre numerele următoare poate reprezenta suma dintre x și y.

A. 1025; **B.** 2345,15; **C.** 12349; **D.** 25000.

7 Precizați un interval în care se găsește numărul real x, știind că valoarea aproximativă a lui x cu 2 zecimale exacte este 2,03.

8 Precizați intervalul în care se găsește numărul real x, știind că prin rotunjire la sutimi s-a obținut 3,26.

9 Aflați valorile numărului natural n, știind că intervalul $[-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$ conține 5 numere întregi.

10 Demonstrați că $\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30}}}\in(5,6)$.

11 Care este numărul întreg cel mai apropiat de $100\sqrt{14}$?

12 Fie $A=\{x\in\mathbf{R} \mid [x]\in\{-1,0\}\}$ și $B=\{x\in\mathbf{R} \mid |x|\le 1\}\setminus\{1\}$. Arătați că $A=B$.

13 Determinați mulțimea $A=\left\{x\in\mathbf{R} \,\middle|\, \frac{|2x-1|}{3}\le 3\right\}$.

14 Încadrați între două numere întregi consecutive fiecare dintre numerele următoare:

$$-\sqrt{23},\ 100\pi,\ \sqrt{2}+\sqrt{15},\ 4\sqrt{21},\ |1-\sqrt{6}|,\ (\sqrt{2}+\sqrt{7})^2.$$

15 Rotunjiți la cel mai apropiat întreg, fiecare dintre numerele $\sqrt{10}$, $-\sqrt{10}$, $2\sqrt{10}$ și $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

16 După ce a cheltuit două treimi din suma pe care o avea și încă 8 lei, apoi a cheltuit jumătate din suma rămasă, Daniel a constatat că i-au rămas mai puțin de 10 lei. Ce se poate afirma despre suma cu care a plecat Daniel la cumpărături?

TEST DE AUTOEVALUARE

Recomandat pentru portofoliu personal

10p din oficiu

SUBIECTUL I - Pe foaia de rezolvare scrieți numai rezultatele. (30 de puncte)

5p 1. Cel mare număr întreg din intervalul $[-5;\ 3\sqrt{3}\,]$ este . . .

5p 2. Suma numerelor întregi din intervalul $(-7;\ 6)$ este . . .

5p 3. $[-4;\ 4] \cup [-6;\ 0] = \ldots$

5p 4. Intersecția intervalelor $(-3;\ 6]$ și $[2;\ 8)$ este intervalul . . .

5p 5. Soluțiile naturale ale inecuației $2x < \sqrt{17}$ sunt . . .

5p 6. Mulțimea soluțiilor reale ale inecuației $8x - 5(2x - 4) \le 8$ este . . .

SUBIECTUL al II-lea - Precizați litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

5p 1. Mulțimea soluțiilor reale ale inecuației $|2x - 3| < 5$ este:
A. $[-1;\ 4]$ **B.** $(-\infty, 4)$ **C.** $\{0, 1, 2, 3\}$ **D.** $(-1;\ 4)$

5p 2. Reuniunea intervalelor $(-5;\ 3]$ și $[-1, 7]$ este intervalul:
A. $(-5;\ 7]$ **B.** $[-1;\ 3]$ **C.** $[3;\ 7]$ **D.** $[-5;\ 7]$

5p 3. Mulțimea $A = \{x \in \mathbf{R} \mid |x - 1| = x - 1\}$ este egală cu:
A. $(-\infty,\ 1)$ **B.** $[1, \infty)$ **C.** $[0, \infty)$ **D.** $(1, \infty)$

5p 4. Dacă $x \in \mathbf{R}$ și $\dfrac{3}{x-1} \le 0$, atunci x aparține mulțimii:
A. $[1, +\infty)$ **B.** $(-\infty, 1)$ **C.** $(1, \infty)$ **D.** $(-\infty, 0]$

5p 5. Fie $a = \sqrt{(x+3)^2} + \sqrt{(x-1)^2}$ și $x \in (-3;\ 1)$. Valoarea lui a este:
A. 4 **B.** 2 **C.** $2x + 2$ **D.** $2x - 4$

5p 6. Soluția reale a inecuației $2(x + 3) - 4 < 6$ este:
A. $(-\infty, 1]$ **B.** $[0, 2)$ **C.** $(-\infty,\ 2)$ **D.** $(-\infty, 2]$

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de rezolvare scrieți rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Fie numărul $a = \dfrac{2}{3 \cdot 5} + \dfrac{3}{5 \cdot 8} + \dfrac{5}{8 \cdot 13} + \dfrac{8}{13 \cdot 21}$.

5p a) Calculați numărul a.

5p b) Demonstrați că $a \in \left(\dfrac{1}{4};\ \dfrac{1}{3}\right)$.

2. Fie mulțimile $A = \left\{x \in \mathbf{R} \mid 1 \le \dfrac{2x+5}{3} \le 3\right\}$ și $B = \left\{x \in \mathbf{R} \mid \left|\dfrac{2x+3}{5}\right| < 1\right\}$.

5p a) Determinați mulțimile A și B.

5p b) Determinați: $A \cap \mathbf{Z}$, $B \cap \mathbf{N}$, $A \cup B$ și $A \cap B$.

3. Răspunzând la toate cele 100 de întrebări ale unui test, un elev a obținut 340 de puncte. Pentru fiecare răspuns corect se acordă 5 puncte, iar pentru fiecare răspuns greșit se scad 3 puncte.

5p a) Câte răspunsuri corecte a dat elevul?

5p b) Care este numărul minim de răspunsuri corecte pe care ar fi trebuit să le dea pentru a depăși 450 de puncte?

2 CALCUL ALGEBRIC ÎN R

Lecția 1. Operații cu numere reale reprezentate prin litere

Deosebirea esențială între aritmetică și algebră este aceea că, în timp ce aritmetica operează cu numere, în algebră operăm cu litere care sunt simboluri ale numerelor.

Rezolvarea multor probleme cu caracter concret, rezolvarea ecuațiilor și a inecuațiilor, exprimarea unor formule, reguli sau legi din domeniul matematicii, al fizicii și al chimiei necesită utilizarea literelor ca simboluri ale numerelor reale.

✓ Sume algebrice. Reducerea termenilor asemenea

Cele mai simple operații ce se pot efectua cu numere reale sunt adunarea și scăderea. Însă, în timp ce adunarea are proprietăți care sunt utile în calcule, scăderea nu are asemenea proprietăți (nu este comutativă, nu este asociativă). De aceea, în algebră este preferabil să înlocuim scăderea prin adunarea dintre descăzut și opusul scăzătorului. Astfel, o succesiune de adunări și scăderi poate fi gândită ca o succesiune numai de adunări, ceea ce permite aplicarea proprietăților adunării.

Exemplu $7x+9y-10x-25y-13x-y=7x+9y+(-10x)+(-25y)+(-13x)+(-y)=7x+(-10x)+$ $+(-13x)+9y+(-25y)+(-y)=x(7-10-13)+y(9-25-1)=-16x-17y$.

- Prin *sumă algebrică* înțelegem o succesiune de adunări și scăderi.
- Fiecare termen al unei sume algebrice este de forma cL unde c este un număr real numit *coeficient*, iar L este *partea literală*, adică un produs de puteri (cu exponenți întregi) de numere reale reprezentate prin litere.
- Dacă un termen nu conține parte literală, atunci acesta reprezintă *termenul liber*.

Exemplu Suma algebrică $S=2xy^{-1}-x^2-7xy^{-1}+5$ are patru termeni. Termenul $2xy^{-1}$ are coeficientul 2 și partea literală xy^{-1}, termenul $-x^2$ are coeficientul -1 și partea literală x^2 etc.. Termenul 5, format doar din coeficient, este un termen liber.

- Doi termeni care au aceeași parte literală se numesc *termeni asemenea*.

Exemplu Termenii $2xy^{-1}$ și $-7xy^{-1}$ sunt termeni asemenea. Suma lor este $2xy^{-1}-7xy^{-1}=(2-7)xy^{-1}=-5xy^{-1}$.

Observație

Putem scrie pe baza distributivității înmulțirii față de adunare,

$$c_1L+c_2L+\ldots+c_nL=(c_1+c_2+\ldots+c_n)L,$$

adică suma unor termeni asemenea se obține făcând suma algebrică a coeficienților și păstrând partea literală.

- Înlocuirea termenilor asemenea prin suma lor poartă numele de *reducerea termenilor asemenea*.

✓ Înmulțirea și ridicarea la putere a numerelor reale, reprezentate prin litere

Pentru a scrie sub o formă mai simplă produsul unor numere reale reprezentate prin litere sau puterea unui număr real, aplicăm proprietățile înmulțirii sau regulile de calcul cu puteri.

Exemple

1. Produsul numerelor $2x$ și $-3x^5$ este $(2x)\cdot(-3x^5)=2\cdot(-3)\cdot x\cdot x^5=-6x^6$.
2. Produsul numerelor $\sqrt{2}\,a^3b^2$ și $-5\sqrt{2}\,ac^2$ este
$$(\sqrt{2}\,a^3b^2)\cdot(-5\sqrt{2}\,ac^2)=\sqrt{2}\cdot(-5\sqrt{2})\cdot a^3\cdot a\cdot b^2\cdot c^2=-10a^4b^2c^2.$$
3. Puterea a patra a numărului $(-2x^5y^3)$ este $(-2x^5y^3)^4=(-2)^4\cdot(x^5)^4\cdot(y^3)^4=16x^{20}y^{12}$.

Reține!

- Pentru a înmulți două numere reale reprezentate prin litere, înmulțim coeficienții între ei, respectiv părțile literale între ele.
- Pentru a ridica la o putere un număr reprezentat prin litere, atât coeficientul cât și partea literală se ridică la acea putere.

Înmulțirea unui factor cu o sumă algebrică

Înmulțirea unui factor cu o sumă algebrică se realizează cu ajutorul distributivității înmulțirii față de adunare.

Exemple $(-3)(x-y-z)=-3x+3y+3z$; $\quad 2x^2y^{-2}(x^2+y^2-1)=2x^4y^{-2}+2x^2-2x^2y^{-2}$.

Produsul dintre două sume algebrice

Ne propunem să găsim procedeul de calcul al produsului dintre suma $a+b+c$ și suma $x+y+z$. Pentru aceasta, notăm $x+y+z=S$ și aplicăm distributivitatea înmulțirii față de adunare:

$$(a+b+c)(x+y+z)=(a+b+c)S=aS+bS+cS=a(x+y+z)+b(x+y+z)+c(x+y+z)=$$
$$=ax+ay+az+bx+by+bz+cx+cy+cz.$$

Reține!

Pentru a înmulți două sume algebrice, înmulțim fiecare termen al primei sume cu fiecare termen al celei de a doua sume și apoi facem suma algebrică a termenilor obținuți.

Exemplu $(x+y)(-x+y+3)=-x^2+xy+3x-xy+y^2+3y=-x^2+3x+y^2+3y$.

✓ Împărțirea numerelor reale reprezentate prin litere

A împărți două numere reale x și y (unde $y\neq 0$) înseamnă a înmulți numărul x cu inversul lui y sau, echivalent, a găsi numărul z cu proprietatea $x=yz$.

Exemple

1. Câtul numerelor $16x^5y^2$ și $2xy$ este $8x^4y$, pentru că $(8x^4y)(2xy)=16x^5y^2$. Altfel, scriem câtul sub formă de fracție și o simplificăm: $\dfrac{16x^5y^2}{2xy}=8x^4y$.
2. Câtul numerelor reale $\dfrac{xyz}{a}$ și $\dfrac{y^2}{a^2}$ (unde $a\neq 0$, $y\neq 0$) este $\dfrac{xyz}{a}\cdot\dfrac{a^2}{y^2}=\dfrac{a^2xyz}{ay^2}=\dfrac{axz}{y}$.

Probleme rezolvate

1 Calculați $[(x-y)(x+2y)-(x+y)(x-2y)]^2:(4y^2)$, unde $x,y\in\mathbf{R}$, $y\neq 0$.

Soluție Ținând seama de regulile privind ordinea operațiilor și folosirea parantezelor, avem:
$[x^2+2xy-xy-2y^2-(x^2-2xy+xy-2y^2)]^2:(4y^2)=(x^2+xy-2y^2-x^2+xy+2y^2)^2:$
$:(4y^2)=(2xy)^2:(4y^2)=(4x^2y^2):(4y^2)=x^2$.

2 O formație muzicală a susținut două spectacole. După ce la primul spectacol s-au vândut toate biletele, la al doilea spectacol s-a mărit prețul biletului cu 25%, dar încasările au crescut numai cu 10%. Cu ce procent s-a micșorat numărul spectatorilor?

Soluție Notăm cu a numărul spectatorilor și cu b prețul biletului la primul spectacol. Suma încasată la primul spectacol este ab. Suma încasată la al doilea spectacol este 110% din ab, adică $\frac{11ab}{10}$. Prețul biletului la al doilea spectacol este 125% din b, adică $\frac{125b}{100} = \frac{5b}{4}$.

Deci numărul spectatorilor la al doilea spectacol a fost $\frac{11ab}{10} : \frac{5b}{4} = \frac{22a}{25} = \frac{88}{100}a$. Numărul spectatorilor la al doilea spectacol reprezintă 88% din numărul celor de la primul spectacol. În concluzie, numărul spectatorilor a scăzut cu 100% – 88% = 12%.

PROBLEME

1 Aduceți la forma cea mai simplă:

a) $x - x + x$; b) $2a^3 - a + a^3 - 4a^3$;

c) $2x - x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{5} - 2,5x + 0,5x^3 - x^2$;

d) $1\frac{1}{3}x + 2xy - 2x + 5,(6)x - 3xy$;

e) $\frac{11}{6}x^2 + 5a - 2xy - 0,5xy^2 + 7xy - 9x^2 - -a - \frac{3}{2}xy^2 - 1,8(3)x^2$.

2 Efectuați: a) $2a + 5a$; b) $a^2 - 4a^2$;

c) $-7xy + 4xy$; d) $\frac{1}{2}b - 2b + 0,4b$;

e) $\sqrt{2} - 2x + 4x - 2x$;

f) $4x^2y - 3xy^2 - 2x^2y + 3xy^2$;

g) $-\frac{1}{3}a^2 + ab^2 - \frac{1}{2}a^2$; h) $-ab + \frac{2}{3}ab - \frac{1}{4}ab$;

i) $\frac{3}{4}x - \frac{1}{3}x - \frac{5}{6}x - \frac{7}{2}x + x$.

3 Efectuați, reducând termenii asemenea:

a) $2a - (-3a) + (-5a) - b - (-b)$;

b) $\frac{1}{2}ab - (-a^2) - a^2 - \frac{1}{3}ab$;

c) $(2a + 3) + (2a - 3) - (2a + 1) - (-3a + 2)$;

d) $(2x + 3y) + (-4x + 5y - 1) - (-3x + 8y - 4)$;

e) $x^3 - 5x^2 + 2x - 7 - (x^3 + 4x - 1) + (x^2 + 6x + 2)$;

f) $(x + 2y - 4) - (-3x - y - 5) - 3y$;

g) $-\left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 3x + 5\right) + \left(\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 3x + 1\right)$;

h) $(-2x^2 + x - 5) - (-x^2 + 3x - 2) + (x^2 - x - 9)$;

i) $(2x + \sqrt{3}\,y) + (-4x + 2\sqrt{3}\,y - 1) - (3x + 3\sqrt{3}\,y - 4)$;

j) $(x + y + z) + (x - y + z) - (x + y - z) - (x - y - z)$;

k) $(a^3 + a^2 + a + 1) - (a^3 - a^2 + a - 1) - (2a^2 + 2)$.

4 Efectuați: a) $(x^2) \cdot (-2x)$; b) $\left(\frac{1}{2}xy\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}x^2y\right)$;

c) $(\sqrt{2}\,a^2b) \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}b\right)$; d) $(2x^2)^2$;

e) $\left(-\frac{1}{2}a^2\right)^3$; f) $(5x^2 - 7x^2)^2$;

g) $(-3x^2) : (+x)$, $x \neq 0$;

h) $(-14x^2y) : (7xy)$, $x, y \in \mathbf{R}^*$;

i) $\left(-\frac{3}{7}a^2b^2\right) : \left(-\frac{1}{14}a\right)$, $a \neq 0$;

j) $x^7 : (-2x^4)$, $x \in \mathbf{R}^*$;

k) $\left(-\frac{4}{3}a^3\right) : \left(+\frac{2}{3}a^2\right)$, $a \in \mathbf{R}^*$.

5 Efectuați: a) $2a(a - 3b)$; b) $-2x^2(x^2 - 3x + 1)$;

c) $2a(a + b) - 2b(a - b) - 2(a^2 + b^2)$;

d) $(a + 2) \cdot (a + 3)$; e) $(a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$;

f) $(8a^2 - 6a) : (+2a)$, $a \in \mathbf{R}^*$;

g) $(-9x^3 - 12x^2) : (-3x)$, $x \neq 0$;

h) $(5x^2y - 12xy^2) : (-3xy)$, $x, y \in \mathbf{R}^*$;

i) $\left(-\frac{3}{8}x^4 - \frac{6}{5}x^3 + \frac{3}{5}x^2\right) : \left(-\frac{3}{10}x^2\right)$, $x \neq 0$;

j) $(-2x) \cdot (3x^2) \cdot (-4x^3) : (-8x^4)$, $x \in \mathbf{R}^*$.

6 Efectuați:

a) $(2x - 1)(3x - 2) - 4x(x + 3) + 2(x + 1)(x - 2)$;

b) $(x + 1)(3x - 5) - 3(x + 2)(x - 4) - 2x(x + 6)$;

c) $(2x + 1)(x + 2) - (x + 1)(2x + 1) - x(x - 1)$;

d) $-3ab(a^2 + b^2) + ab(a^2 - b^2) + 2ab(a^2 + 2b^2)$;

e) $(3a - 2)(a^2 - 3a + 4) - (2a - 3)(a^2 - a + 1)$;

f) $(6x^3 - 12x^2 + 4x) : (-2x) + (12x^4 - 8x^3) : : (-4x^3)$, $x \in \mathbf{R}^*$.

7 Efectuați înmulțirile și reduceți termenii asemenea:

a) $2(x+y+5z)$;
b) $-5(x-y)+3(x+y)+(-2)\cdot(-y)$;
c) $x(x+y)-y(x-y)$;
d) $2(x+y)(x-y)-5(x^2+y^2)$;
e) $(a+b)(x^2-ab+b^2)-b^3$;
f) $a^3-(a-b)(a^2+ab+b^2)$;
g) $(x+xy)\cdot(-2y)+7xy^2+x(x-y)-2(x+y)x$.

8 Efectuați:a) $(2x^3)\cdot(xy)^2\cdot(x+x^2-y):x^2$;

b) $a^{-1}(a^3+ab)\cdot(b^2)^3+(ab^3)^2$;

c) $(\sqrt{2}\,a)^2\cdot(\sqrt{3}\,b)^3:(ab)-\sqrt{3}\,a(b^{-3})^{-3}\cdot b^{-7}$;

d) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}xy^2\right)^5\cdot(\sqrt{2}\,x)^{-5}+y-(0,25\cdot y^5)^2-\frac{4}{3}y$;

e) $\left(\frac{1}{3}x\right)^4\cdot(\sqrt{3}\,y)^8\cdot(xy^2)^{-2}+\frac{1}{2}x^2\cdot(y^{-4})^{-1}$;

f) $x(x+y+1)-y(x-1)$;

g) $[0,(3)\cdot x^{-2}]^3:(3x)^{-4}$;

h) $\frac{14}{3}y^2-\frac{1}{2}xy-3,2x-1,(6)(y^{-2})^{-1}+5xy+3,4x$;

i) $(x+y)(x+2y)+\frac{1}{2}(x-y)(x+y)-3x^3y(1+y^2):x^2$;

j) $(a-2b)(a+b)(2a-b)+5ab(3a-4b)$;

k) $(x+y+z)(y-z)-(x+z)(y-2z)$.

9 Efectuați: a) $(x-1)(x-1)$;
b) $(x+y)(x+y)$; c) $(x+1)(x+2)$;
d) $(x+2a)(x+3a)$; e) $(x^2-5a)(x^2-2a)$;
f) $(x^2+2)(x^2-7)$;
g) $(1+x+x^3+x^4)\cdot(x-1)+2(x^5+x^7+x^8):x^3$;
h) $2(a-b)(a-b)+3(a+b)(a+b)+(a-b)(a+b)$;
i) $(2x^3+x^2-5x+3)(3x^3-2x^2-x-4)$.

10 Dacă $A=x^{|1-2+3-4+...+99-100|}:x^{1+2+...+10}\cdot x^5+x^7-1$ și $B=(xy-y)\cdot(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)\cdot y^{-1}$, calculați $(B-A)^{2020}$.

11 Calculați:

a) $\sqrt{64a^2b^2}+a(2b-3a)$, $(a,\ b<0)$;

b) $[(ab-1)(a^2b^2+ab+1)+1]:ab+\sqrt{121a^4b^4}$;

c) $\sqrt{48x^2y^4}-\sqrt{75x^2y^4}-\sqrt{192}\cdot|x|\cdot y^2-\sqrt{3}\,|x|y^2$.

12 Dacă $a,\ b\in\mathbf{R}$, stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

1) $(a^2+b)(a^2-5b)=a^4-4a^2b-5b^2$.
2) $(a-2b)(a-4b)=(a-4b)(a-b)+(\sqrt{2}\,b)^2$.
3) $(a+4b)(3a+b)=(a+9b)(a+4b)+2a(a+b)-32b(a+b)$.

13 Prețul unui obiect a crescut cu 25%, apoi s-a redus, revenind la prețul inițial. Cu cât s-a redus prețul?

14 Demonstrați că:

a) produsul a două numere naturale terminate în 25 se termină în 25;
b) produsul a două numere naturale terminate în 76 se termină în 76.

15 Dacă $a-b=1$, calculați $(a-b)(a+b)-2b$.

16 Ionuț îi propune colegului de bancă Dragoș următorul test:

- Alege un număr întreg fără ca eu să-l știu.
- Scade din numărul ales pe 2.
- Înmulțește rezultatul obținut cu numărul inițial mărit cu 3.
- Din noul rezultat scade produsul dintre numărul ales și succesorul lui.

Dragoș rămâne surprins când Ionuț i-a comunicat rezultatul final, și anume -6.

a) Cum a procedat Ionuț pentru a determina rezultatul final?
b) Propuneți și voi colegului (colegei) de bancă un test asemănător în care rezultatul final să fie -20.

17 Iată un truc prin care putem afla vârsta unei persoane și luna în care s-a născut:

Cerem persoanei să scrie numărul de ordine al lunii în care s-a născut, să dubleze acest număr, să adauge 5, să înmulțească rezultatul cu 50, la rezultat să adune vârsta pe care o are (trebuie ca persoana să aibă mai puțin de 100 de ani), apoi să scadă 250 și să ne comunice rezultatul. Ultimele două cifre ale rezultatului indică vârsta persoanei, iar restul numărului reprezintă numărul de ordine al lunii în care s-a născut. De exemplu, dacă persoana ne comunică rezultatul 1126 înseamnă că are 26 de ani și s-a născut în luna a unsprezecea. *Găsiți explicația matematică a acestui truc.*

Lecția 2. Formule de calcul prescurtat

În cele ce urmează, vom stabili formule pentru calculul unor anumite expresii întâlnite frecvent, formule care ne ajută să efectuăm calcule mai rapid. Aceste formule de calcul, numite *formule de calcul prescurtat*, sunt utile atât în calculul unor expresii reprezentate prin litere, cât și pentru efectuarea unor calcule numerice.

✓ Formulă de calcul prescurtat pentru $(a+b)^2$, unde $a, b \in \mathbb{R}$

Calculând $(a+b)^2$, avem:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2.$$

Reține!

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2, \text{ unde } a,b\in\mathbf{R}.$$

✓ Formulă de calcul prescurtat pentru $(a-b)^2$, unde $a, b \in \mathbb{R}$

Înlocuind în formula precedentă pe b prin $-b$, obținem formula:

Reține!

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2, \text{ unde } a,b\in\mathbf{R}.$$

Exemple

1. $(x+3)^2=x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2=x^2+6x+9;$
2. $(2a-5)^2=(2a)^2-2\cdot 2a\cdot 5+5^2=4a^2-20a+25;$
3. $(-a-4)^2=[(-a)+(-4)]^2=(-a)^2+2\cdot(-a)\cdot(-4)+(-4)^2=a^2+8a+16;$
4. $21^2=(20+1)^2=20^2+20\cdot 2+1=400+40+1=441.$

Invers, în unele situații este util să scriem expresia $a^2\pm 2ab+b^2$ sub forma $(a\pm b)^2$, adică să *restrângem pătratul*.

! Atenție! Cele două formule stabilite anterior este util a fi reținute și sub formele:

$$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2 \text{ unde } a,b\in\mathbf{R}.$$

În acest caz, spunem că restrângem pătratul unei anumite expresii.

Exemple

1. $4x^2+4x+1=(2x)^2+2\cdot 1\cdot 2x+1^2=(2x+1)^2,\ x\in\mathbf{R}.$
2. $9x^2\cdot y^2-12xy+4=(3xy)^2-2\cdot(3xy)\cdot 2+2^2=(3xy-2)^2,\ x,y\in\mathbf{R}.$
3. $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}\cdot 1+1^2}=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}+1.$

Observație

Cu ajutorul formulelor de mai sus se poate stabili o formulă de calcul prescurtat pentru ridicarea la pătrat a sumei de trei numere reale.

Astfel, dacă $a,b,c\in\mathbf{R}$, atunci: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$

Formula se poate demonstra scriind $(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2$ și apoi aplicând succesiv formule pentru $(x+c)^2$ unde $x=a+b$ etc.

Exemple **1.** $(x+y+1)^2 = x^2+y^2+1+2xy+2x+2y.$

2. $(x-y+2)^2 = [x+(-y)+2] = x^2+(-y)^2+2^2+2x\cdot(-y)+2x\cdot 2+2\cdot(-y)\cdot 2 =$
$= x^2+y^2+4-2xy+4x-4y.$

3. $(x-y-2)^2 = [x+(-y)+(-2)]^2 = x^2+(-y)^2+(-2)^2+2x\cdot(-y)+2x\cdot(-2)+2\cdot(-y)\cdot(-2) =$
$= x^2+y^2+4-2xy-4x+4y.$

✓ Formulă de calcul prescurtat pentru (*a* - *b*)(*a* + *b*), unde *a*, *b* ∈ R

Calculând $(a+b)(a-b)$, avem $(a+b)(a-b) = a^2-ab+ab-b^2 = a^2-b^2$. Reținem formula:

Reține!

$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2, \text{ unde } a, b \in \mathbf{R}.$$

Observații

1. Formula stabilită anterior se mai numește formulă pentru *produsul sumei prin diferență.*

2. Formula anterioară este util a fi reținută și sub forma $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$, unde $a, b \in \mathbf{R}$.
În acest caz o putem numi *formula diferenței de pătrate* a două numere reprezentate prin litere.

Exemple

1. $(3x+2)(3x-2) = (3x)^2-2^2 = 9x^2-4;$

2. $(x+y+5)(x+y-5) = (x+y)^2-5^2 = x^2+2xy+y^2-25.$

3. $(5\sqrt{3}+6\sqrt{2})(5\sqrt{3}-6\sqrt{2}) = (5\sqrt{3})^2-(6\sqrt{2})^2 = 75-72 = 3;$

4. $99\cdot 101 = (100+1)(100-1) = 10000-1 = 9999;$

5. $\sqrt{337^2-288^2} = \sqrt{(337+288)(337-288)} = \sqrt{625\cdot 49} = 25\cdot 7 = 175.$

✓ O aplicație a formulelor de calcul prescurtat: raționalizarea numitorilor unor fracții

În clasa a VII-a am văzut că pentru a raționaliza numitorul de forma $k\sqrt{a}$, unde $k \in \mathbf{Z}^*, a > 0$, al unei fracții se amplifică fracția cu $\sqrt{a}$. Ne propunem în continuare să stabilim cu ajutorul formulelor de calcul prescurtat metoda de a raționaliza un numitor de forma $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, unde $a > 0$ și $b > 0$. Cu ajutorul formulei produsului sumei prin diferență, avem: $\left(\sqrt{a} \pm \sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a} \mp \sqrt{b}\right) = a-b$. De aici deducem că expresia conjugatei lui $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ este expresia $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$.

Rezultatele anterioare pot fi sistematizate în următorul tabel:

E (expresia)	C (conjugata)	$E\cdot C$
$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$	a
$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\sqrt{a}-\sqrt{b}$	$a-b$
$\sqrt{a}-\sqrt{b}$	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$a-b$

Exemple **1.** Pentru fracția $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$, amplificăm așadar cu $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ și obținem:

$$\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} = \sqrt{5}-\sqrt{3}.$$

2. Pentru fracția $\frac{1}{2-\sqrt{6}}$, amplificăm cu $2+\sqrt{6}$ și obținem:

$$\frac{1}{2-\sqrt{6}} = \frac{2+\sqrt{6}}{(2-\sqrt{6})(2+\sqrt{6})} = \frac{2+\sqrt{6}}{4-6} = \frac{2+\sqrt{6}}{-2}.$$

3. Pentru fracția $\dfrac{7}{2\sqrt{5}+3\sqrt{3}}$, amplificăm cu $2\sqrt{5}-3\sqrt{3}$ și obținem:

$$\frac{7}{2\sqrt{5}+3\sqrt{3}}=\frac{7(2\sqrt{5}-3\sqrt{3})}{(2\sqrt{5}+3\sqrt{3})(2\sqrt{5}-3\sqrt{3})}=\frac{7(2\sqrt{5}-3\sqrt{3})}{(2\sqrt{5})^2-(3\sqrt{3})^2}=$$

$$=\frac{7(2\sqrt{5}-3\sqrt{3})}{20-27}=\frac{7(2\sqrt{5}-3\sqrt{3})}{-7}=3\sqrt{3}-2\sqrt{5}.$$

Probleme rezolvate

1 Demonstrați că numărul $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ este irațional.

Soluție Presupunem că $\sqrt{5}+\sqrt{3}\in\mathbf{Q}$ și notăm $a=\sqrt{5}+\sqrt{3}$.

Atunci $a^2=5+2\sqrt{15}+3=2\sqrt{15}+8$. Rezultă $\sqrt{15}=\dfrac{a^2-8}{2}$ și, cum am presupus că $a\in\mathbf{Q}$, rezultă că $\sqrt{15}\in\mathbf{Q}$, ceea ce este *fals*, deoarece numărul natural 15 nu este pătrat perfect. Deci $\sqrt{5}+\sqrt{3}\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$.

2 a) Dacă $a,b\in\mathbf{R}$, $a,b>0$ și $a^2-b>0$, atunci: $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+c}{2}}\pm\sqrt{\dfrac{a-c}{2}}$, unde $c=\sqrt{a^2-b}$.

b) Folosind eventual punctul a), arătați că $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$.

c) Arătați că numărul $x=\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{28-10\sqrt{3}}$ este irațional.

Soluție a) Prin ridicarea la pătrat a ambilor membri ai egalității propuse se obține:

$$a\pm\sqrt{b}=\frac{a+c}{2}\pm2\sqrt{\frac{a^2-c^2}{4}}+\frac{a-c}{2}$$ egalitate evident adevărată.

b) Folosind punctul a), avem $a=3, b=8, c=1$ și atunci $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{3+1}{2}}+\sqrt{\dfrac{3-1}{2}}=1+\sqrt{2}$.

c) Folosind rezultatul de la punctul a), obținem $x=2+\sqrt{3}-(5-\sqrt{3})=-3+2\sqrt{3}$ care este evident un număr irațional.

Comentariu Rezultatul stabilit la punctul a) al problemei anterioare se numește *formula radicalilor compuși*.

PROBLEME

1 Calculați: a) $(x+1)^2$; b) $(x-1)^2$; c) $(2-x)^2$; d) $(2x-y)^2$; e) $(5x^2+7y^2)$; f) $(2x-3\sqrt{3})^2$; g) $(\sqrt{5}-2x)^2$; h) $\left(\frac{1}{2}+x\right)^2$; i) $\left(x^3-\frac{1}{3}\right)^2$; j) $\left(\frac{x^2}{3}-\frac{3}{2}\right)^2$; k) $\left[\frac{x}{5}-1,(6)\right]^2$; l) $\left(4x+\frac{y}{3}\right)^2$; m) $\left(\frac{x}{4}+\frac{y}{5}\right)^2$; n) $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)^2$;

o) $\left(\frac{4x}{3}+\frac{9a}{2}\right)^2$; p) $\left(\frac{x}{2}-0,5\cdot y^4\right)^2$; q) $(x\sqrt{5}+y\sqrt{2})^2$; r) $(x\sqrt{3}-a\sqrt{7})^2$; s) $\left(a\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)^2$; t) $\left(\frac{b\sqrt{3}}{2}+\frac{4a}{\sqrt{3}}\right)^2$.

2 Dezvoltați: a) $(x+1)^2$; b) $(2+x)^2$; c) $(2x+1)^2$; d) $\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2$; e) $\left(\frac{1}{3}a+\frac{3}{2}\right)^2$; f) $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2$; g) $(-2a-b)^2$; h) $\left(\frac{3}{4}x^2-2x\right)^2$; i) $(2\sqrt{2}-x)^2$; j) $(2x+y+1)^2$; k) $(x-2y+1)^2$.

3 Completați spațiile libere, folosind formulele de calcul prescurtat:

a) $(x+2)(x-2)=x^2-\ldots$;

b) $(2a+3)(2a-3)=\ldots-9$;

c) $\left(\frac{1}{2}x+1\right)\left(\frac{1}{2}x-\ldots\right)=\frac{1}{4}x^2-1$;

d) $(0,1x+1)^2=\frac{1}{100}x^2+1+\ldots$

4 Demonstrați că $\sqrt{2}-\sqrt{5}$ și $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ sunt numere iraționale.

5 Scrieți sub formă de pătrat al unei sume sau al unei diferențe:

a) x^2+6x+9; b) $4a^2-4a+1$;
c) x^2+2x+1; d) $3+2\sqrt{2}$;
e) $8-2\sqrt{15}$; f) $x^2+2\sqrt{2}x+2$;
g) $2x^2-2x\sqrt{2}+1$; h) $5+2\sqrt{6}$;
i) $4-2\sqrt{3}$; j) $11-4\sqrt{7}$;
k) $14-6\sqrt{5}$; l) a^2-2a+1;
m) $4a^2+9b^2+12ab$; n) $7+2\sqrt{10}$.

6 Calculați:

a) $(x-5)(x+5)$; b) $(7+y)(7-y)$;
c) $(2x+3)(2x-3)$; d) $(1-x)(1+x)$;
e) $(x^2+\sqrt{3})(x^2-\sqrt{3})$; f) $(\sqrt{7}+2y)(\sqrt{7}-2y)$;
g) $(x-2y)(x+2y)$; h) $(5x+4y^2)(5x-4y^2)$;
i) $\left(\frac{x^3}{2}+\frac{y}{4}\right)\left(\frac{x^3}{2}-\frac{y}{4}\right)$; j) $\left(a\sqrt{3}-\frac{b}{2}\right)\left(a\sqrt{3}+\frac{b}{2}\right)$;
k) $96\cdot 104$; l) $37\cdot 43$;
m) $(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})$;
n) $(\sqrt{101}-10)(\sqrt{101}+10)$.

7 Calculați:

a) $(x-1)(x+1)+(x+1)^2-(x-1)^2$;
b) $(x^2+1)(x-1)+(x+1)^2$;
c) $(2x+y)^2+(2x-y)^2-(3x+y)(3x-y)$;
d) $(3x-2y)^2+(x+4y)^2-(5x-y)(5x+y)$;
e) $(x\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(x\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-$
$-(\sqrt{14}+3)(\sqrt{14}-3)$;
f) $(2x-0,3y)^2+(3x+0,2y)^2-13\left(x-\frac{y}{10}\right)\left(x+\frac{y}{10}\right)$;
g) $(x+2)^2+(x-2)^2+(x+2)(x-2)$;
h) $(2x-y)^2-(2x+3y)^2+(x+y)(x+2y)-$
$-(x+3y)(x-3y)$;
i) $\left(5\sqrt{5}-\frac{x}{2}\right)\left(5\sqrt{5}+\frac{x}{2}\right)+\left(\frac{x}{2}+1\right)^2$;
j) $99^2+100^2+101^2-3\cdot 99\cdot 101$;
k) $(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})+$
$+\ldots+(\sqrt{98}-\sqrt{99})(\sqrt{98}+\sqrt{99})$;
l) $9\cdot 11+19\cdot 21+29\cdot 31+\ldots+99\cdot 101-10^2-$
$-20^2-\ldots-90^2-100^2$;
m) 105^2; n) $198^2+202^2-198\cdot 202$.

8 a) Calculați $(3k)^2$; $(3k+1)^2$; $(3k+2)^2$;
b) Ce valori poate lua restul împărțirii unui număr natural pătrat perfect la 3?
c) Arătați că numerele 30000005 și $9\underbrace{0\ldots0}_{de\ 2009\ ori}2$ nu sunt pătrate perfecte.

9 a) Ce valori poate lua restul împărțirii unui număr natural pătrat perfect la 4?
b) Arătați că nu există numere întregi a, b astfel încât:
$$a^2+b^2=(19-3\sqrt{2})(19+3\sqrt{2}).$$

10 Raționalizați numitorii și efectuați calculele:

a) $\frac{8}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}-\frac{5}{\sqrt{6}+1}-\frac{5}{\sqrt{2}-1}-\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$;

b) $\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-5}-\frac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3}+\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3}-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}$.

11 Determinați numărul n natural nenul pentru care:
$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=4.$$

12 Dacă se mărește latura unui pătrat cu 3 cm se obține un pătrat cu aria mai mare cu 39 cm^2 decât aria pătratului inițial. Aflați perimetrul pătratului inițial.

13 Calculați rapid, folosind formule de calcul prescurtat:

a) $97\cdot 103$; b) $1996\cdot 2004$; c) 499^2;
d) 3005^2; e) $8765^2-8764\cdot 8766$;
f) $25999\cdot 26001-26000^2$;
g) $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)-2^{32}$.

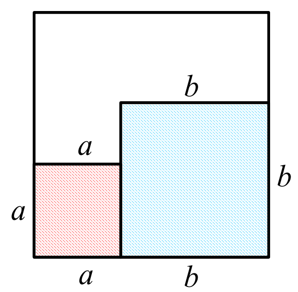
14 Dacă $x\in\mathbf{R}^*$ și $x+\frac{1}{x}=5$, calculați:

a) $x^2+\frac{1}{x^2}$; b) $x^4+\frac{1}{x^4}$.

15 Dacă $x\in\mathbf{R}^*$ și $x+\frac{1}{x}=\frac{17}{4}$, calculați valorile lui $x-\frac{1}{x}$.

16 Calculați media geometrică a numerelor
$a=\sqrt{15}-\sqrt{6}$ și $b=\sqrt{15}+\sqrt{6}$.

17 Un elev decupează dintr-o bucată de carton în formă de pătrat o bucată formată din pătratele alăturate de latură a, respectiv b. Comparați aria suprafeței hașurate cu aria suprafeței nehașurate.



Lecția 3. Descompuneri în factori utilizând reguli de calcul în R (factor comun, grupare de termeni, formule de calcul prescurtat)

Scrierea sub formă de produs este utilă pentru efectuarea împărțirilor, pentru simplificarea unor fracții, pentru demonstrarea unor proprietăți de divizibilitate sau pentru rezolvarea unor ecuații. Metodele de descompunere în factori se bazează pe formulele de calcul prescurtat și pe proprietățile operațiilor cu numere reale.

✓ Metoda factorului comun

Această metodă constă în aplicarea distributivității înmulțirii față de adunare (scădere). Când aplicăm formulele

$$\boxed{ab+ac=a(b+c) \text{ și } ab-ac=a(b-c),}$$

spunem că am scos factor comun pe a. Formulele se extind pentru cazul sumelor algebrice cu mai mulți termeni.

Exemple **1.** $2x+2y+4z-6u=2(x+y+2z-3u)$;

2. $xy+xy^2-xy^3+x=x(y+y^2-y^3+1)$; **3.** $a(x+1)+b(x+1)=(x+1)(a+b)$.

✓ Metoda restrângerii unui pătrat

Această metodă constă în aplicarea formulei:

$$\boxed{a^2 \pm 2ab+b^2=(a \pm b)^2}$$

Exemple **1.** $9a^2+12ab+4b^2=(3a)^2+2\cdot(3a)\cdot(2b)+(2b)^2=(3a+2b)^2$;

2. $x^2-x+\frac{1}{4}=x^2-2x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$; **3.** $(a+b)^2-2(a+b)+1=(a+b-1)^2$.

✓ Metoda diferenței pătratelor

Aceasta constă în aplicarea formulei:

$$\boxed{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}$$

Exemple **1.** $a^2-4=a^2-2^2=(a+2)(a-2)$;

2. $16-b^4=4^2-(b^2)^2=(4-b^2)(4+b^2)=(2+b)(2-b)(b^2+4)$; **3.** $3-x^2=(\sqrt{3})^2-x^2=(\sqrt{3}+x)(\sqrt{3}-x)$.

✓ Metoda grupării termenilor

Sunt situații în care aplicarea metodelor prezentate anterior nu se poate face în mod direct. În acest caz termenii trebuie grupați în mod corespunzător, în așa fel încât aplicând succesiv metodele de mai sus să poată apărea un factor comun tuturor termenilor expresiei date. Astfel, rezolvarea se reduce la metoda factorului comun.

Comentariu În multe situații, pentru a realiza gruparea termenilor, este necesar ca anumiți termeni ai expresiei să fie scriși ca o sumă de doi sau mai mulți termeni.

Exemple

1. $x^2+2ax+a^2+3x+3a=(x+a)^2+3(x+a)=(x+a)(x+a+3)$.

2. $ax+bx-7a-7b=x(a+b)-7(a+b)=(a+b)(x-7)$.

3. $x^2+5x+6=x^2+2x+3x+6=x(x+2)+3(x+2)=(x+2)(x+3)$.

4. $x^2+4x-5=x^2+5x-x-5=x(x+5)-(x+5)=(x+5)(x-1)$ sau altfel,
$x^2+4x-5=x^2+4x+4-9=(x+2)^2-3^2=(x+2+3)(x+2-3)=(x+5)(x-1)$.

✓ Metode combinate

Metodele prezentate anterior se pot aplica succesiv în cadrul aceluiași exercițiu.

Exemple

1. $a^2+b^2+2ab-c^2=(a+b)^2-c^2=(a+b+c)(a+b-c).$
2. $x^2+(a+b)x+ab=x^2+ax+bx+ab=x(x+a)+b(x+a)=(x+a)(x+b).$
3. $x^2+2x-10=x^2+2x+1-11=(x+1)^2-(\sqrt{11})^2=(x+1+\sqrt{11})(x+1-\sqrt{11}).$
4. $x^2+2x\sqrt{2}+1=x^2+2x\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2-1=(x+\sqrt{2})^2-1^2=(x+\sqrt{2}+1)(x+\sqrt{2}-1).$

Probleme rezolvate

1 Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, numărul n^3+3n^2+2n se divide cu 6.

Soluție $n^3+3n^2+2n=n(n^2+3n+2)=n(n^2+n+2n+2)=n[n(n+1)+2(n+1)]=n(n+1)(n+2).$

Concluzia se obține ținând seama că, dintre trei numere consecutive, unul este divizibil cu 3 și cel puțin unul este divizibil cu 2.

2 Aflați câtul împărțirii lui $x^2+2x\sqrt{3}+3-y^2$ la $x+y+\sqrt{3}$, unde x, y sunt numere reale cu proprietatea $x+y+\sqrt{3}\neq 0$.

Soluție $x^2+2x\sqrt{3}+3-y^2=(x+\sqrt{3})^2-y^2=(x+\sqrt{3}+y)(x+\sqrt{3}-y)$, deci câtul împărțirii este $x+\sqrt{3}-y$.

3 Știind că $a+b+c=3$ și $a-b+c=7$, calculați $a^2-b^2+c^2+2ac+2b-1$.

Soluție $a^2-b^2+c^2+2ac+2b-1=(a^2+2ac+c^2)-(b^2-2b+1)=(a+c)^2-(b-1)^2=$
$=(a+c+b-1)(a+c-b+1)=(3-1)(7+1)=16.$

4 Aflați valorile numărului natural n, pentru care $a=n^2+8n-9$ este număr natural prim.

Soluție $a=n^2+8n-9=n^2+8n+16-25=(n+4)^2-5^2=(n+4+5)(n+4-5)=(n+9)(n-1).$

Pentru ca numărul a să fie prim, trebuie ca unul dintre factori (și anume cel mai mic) să fie egal cu 1, adică $n-1=1$, de unde $n=2$. Pentru $n=2$, obținem $a=11$, care este număr prim.

PROBLEME

1 Scoateți factor comun:

a) $3a-3b$; b) $3x^2+3$;
c) $9a-6b$; d) $12a^2+9$;
e) $3a^2-6ab+9$; f) $4x-6y$;
g) $10a+5b+25$; h) $xy+xy^2-3x$;
i) x^2y+xy^2; j) $2a^2b+3ab^2-5a^3b$;
k) $4a+8a^2b-12ab^3$;
l) $a(x+1)+b(x+1)+c(x+1)$;
m) $ab(x-1)-b^2(x-1)$; n) $2(x+3)-5(x+3)$;
o) $3x(1-x)+4(1-x)$; p) $x^3y^2-2xy^5+x^2y$;
q) $(2x-5)(x+7)+(2x-5)(5x-3)$.

2 Descompuneți în factori prin metoda restrângerii unui pătrat:

a) $x^2-10x+25$; b) $x^2+8x+16$;
c) $4x^2+4x+1$; d) $25x^2+10x+1$;
e) $4x^2-20x+25$; f) $x^2+x+\frac{1}{4}$;
g) $3x^2-2x\sqrt{3}+1$; h) $5a^2-4a\sqrt{5}+4$;
i) $5x^2-2xy\sqrt{10}+2y^2$; j) $a^2+16a+64$;
k) $25a^2-20ab+4b^2$; l) $3a^2+2a\sqrt{6}+2b^2$;
m) $2a^4+2a^2\sqrt{2}+1$; n) $a^4+2a^3\sqrt{5}+5a^2$.

3 Descompuneți în factori prin metoda diferenței de pătrate:
a) x^2-5^2; b) $9-x^4$; c) $9x^2-4y^2$;
d) $27-x^2$; e) $8x^2-3$.

4 Descompuneți în factori:
a) $x^2+7x+12$; b) x^2+7x+6;
c) x^2+5x+4; d) $x^2+12x+20$;
e) $x^2+10x+21$; f) $x^2+11x+28$;
g) $x^2+13x+36$; h) $x^2+12x+32$;
i) $x^2-10x+16$; j) $x^2-10x+24$;
k) $x^2-10x+9$; l) $x^2-7x+10$;
m) $x^2-12x+11$; n) $x^2-11x+24$;
o) $x^2-13x+40$; p) $x^2-11x+30$;
q) $x^2+9x-10$; r) $x^2+6x-16$;
s) $x^2+8x-33$; t) $x^2+7x-30$;
u) x^2-4x-5; v) $x^2-6x-27$;
x) $x^2-5x-36$; y) $x^2-7x-18$.

5 Descompuneți în produse de doi factori:
a) a^4+a^2+1; b) a^4+1;
c) a^4-a^2+1; d) x^4+64;
e) x^4+4x^2+16; f) a^4+9a^2+81;
g) $x^2+3x+2+ax+a$; h) $x^2-4x+3-bx^2+b$.

6 Produsul a două numere este $x^2+12x+35$, iar unul din factori este $x+5$. Aflați celălalt factor.

7 Descompuneți în factori x^2+6x+7.

8 Aria unui dreptunghi este $x^2+8x+13$, iar una dintre dimensiuni este $x+4-\sqrt{3}$. Aflați perimetrul dreptunghiului.

9 Arătați că următoarele numere sunt pătrate perfecte:
a) $9^n+4\cdot 3^n+4$, $n\in\mathbf{N}$;
b) $36^n-6^{n+1}+9$, $n\in\mathbf{N}$;
c) $(k^2+3k)(k^2+3k+2)+1$, $k\in\mathbf{Z}$;
d) $n(n+1)(n^2+n-4)+4$, $n\in\mathbf{Z}$.

10 Determinați numerele naturale x și y, știind că
a) $x^2-97=y^2$; b) $x^2-97^2=y^2$.

11 Suma dintre vârsta Corinei și cea a Ralucăi este 16 ani, iar diferența dintre pătratul vârstei Corinei și pătratul vârstei Ralucăi este 32 ani.
Câți ani au cele două fete?

12 Descompuneți în factori:
a) $a^2+2ab+b^2+5a+5b$;
b) $x^2-2x+1+a(x-1)$;
c) $4a^2+4a+1+2ax+x$;
d) $3x^2-2x\sqrt{3}+1+3x\sqrt{3}-3$;
e) $(x+y)^2+x^2-y^2$;
f) $(2a-b)^2-4a^2+b^2$;
g) $x^2+8x+16-b^2$;
h) $(3x-a^3)^2-18x^2+2a^6$;
i) $(x-3)^2-7x-21-(x-3)(x+1)+a(x^2-9)$;
j) $x^2-6x+9-a^2$. k) $2a^2-2b^2$;
l) $3x^2-12$;
m) $4x^2-a^2+14x+7a$; n) $3a^2-16$;
o) $a^2-9b^2-ax+3bx$;
p) $x^2+4x+4-b^2$; q) a^2-x^2-2x-1;
r) $(x+5)^2+4x+20$;
s) $(5x-3)^2-25x^2+9$;
t) $49x^2+14x+1+35ax+5a$;
u) $(x-3)(x+7)+x^2-6x+9$;
v) $81x^2-18x+1-y^2$.

13 Demonstrați că numărul $a=(n+2)^3-n-2$ este multiplu de 3, oricare ar fi $n\in\mathbf{N}$.

14 a) Demonstrați că $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$, oricare ar fi numerele reale pozitive a și b.
b) Dacă $a,b,c\in(0,\infty)$, demonstrați că

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\geq 6.$$

c) Dacă $a,b,c\in(0,\infty)$, arătați că
$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)\geq 8abc$.

15 Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi și $a^4+b^4=c^4+2a^2b^2$, demonstrați că triunghiul este dreptunghic.

16 Arătați că numărul $\frac{7^{4n}+7^{2n}\cdot 6+9}{49^n+3}-3$ este pătratul unui număr natural pentru orice $n\in\mathbf{N}$.

17 Determinați $x,y\in\mathbf{R}$ dacă:

$$x^2-10x+74+14y+y^2\leq 0.$$

Lecția 4. Fracții algebrice

În algebră, folosim literele ca simboluri pentru numere reale, în diverse situații:

- pentru a prezenta, sub o formă generală, proprietăți valabile pentru o largă categorie de numere reale sau legi, reguli, formule din diverse domenii;
- pentru a efectua calcule cu numere necunoscute, a căror determinare revine la rezolvarea unor ecuații sau inecuații.

✓ Expresii algebrice
Valoarea numerică a unei expresii algebrice

Definiție

- Numim *expresie algebrică* o expresie matematică care depinde de una sau mai multe variabile ce iau valori în mulțimi date.
- Dacă expresia algebrică este o fracție al cărei numitor este format din numere reale reprezentate prin litere (variabile), atunci expresia algebrică este o *fracție algebrică.*

Notații

O expresie algebrică se notează cu litere mari urmate de paranteze între care se scriu variabilele de care depinde aceasta. Astfel, o expresie algebrică care depinde de o singură variabilă x o putem nota cu $E(x)$, o expresie algebrică care depinde de două variabile a și b o putem nota prin $E(a, b)$ etc.

Exemple

1. În *Figura* 1 este desenat un pătrat de latură $2x$ și un semicerc având ca diametru una dintre laturile pătratului. Aria porțiunii hașurate este $4x^2 - \frac{\pi x^2}{2}$.

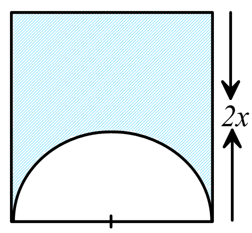


Figura 1

Expresia matematică $4x^2 - \frac{\pi x^2}{2}$ este *o expresie algebrică* depinzând de *variabila* $x \in (0, \infty)$. Putem pune în evidență acest lucru, notând expresia cu $A(x)$.

Relația $A(x) = 4x^2 - \frac{\pi x^2}{2}$ permite calculul ariei hașurate în *figura* 1 pentru orice valoare a lui $x > 0$.

Astfel, dacă $x = 3$, aria este $A(3) = 4 \cdot 3^2 - \frac{\pi \cdot 3^2}{2} = 36 - \frac{9\pi}{2}$. Numărul $A(3)$ reprezintă valoarea numerică a expresiei $A(x)$ pentru $x = 3$.

2. Într-o cutie se găsesc a bile albe și b bile negre. Probabilitatea ca la o extragere să obținem o bilă albă este $\frac{a}{a+b}$.

Expresia matematică $\frac{a}{a+b}$ este o fracție algebrică, depinzând de variabilele $a, b \in \mathbf{N}^*$. Notăm expresia cu $P(a, b)$. Formula $P(a, b) = \frac{a}{a+b}$ permite calculul probabilității în cazuri particulare.

Astfel, probabilitatea ca, dintr-o cutie cu 10 bile albe și 7 bile negre, să obținem la o extragere o bilă albă este $P(10, 7) = \frac{10}{10+7} = \frac{10}{17}$, reprezentând valoarea numerică a expresiei $P(a, b)$ pentru $a = 10$ și $b = 7$.

Definiție

Numim *valoare numerică* a unei expresii algebrice care depinde de una sau mai multe variabile numărul ce se obține prin înlocuirea variabilelor cu valori numerice date.

Exemplu Dacă $E(x)=2x^2-3x+3,\ x\in\mathbf{R}$, atunci pentru a calcula valoarea numerică a lui $E(x)$ pentru $x=3$ se înlocuiește x cu valoarea 3 și obținem: $E(3)=2\cdot 3^2-3\cdot 3+3=12$.

În calculele cu numere reale reprezentate prin litere, folosim proprietățile operațiilor cu numere reale, regulile de calcul cu puteri și radicali. De asemenea, ținem seama de convențiile privitoare la ordinea operațiilor și folosirea parantezelor.

✓ Condiții de existență pentru o fracție algebrică

Precizarea valorilor variabilei (sau variabilelor) pentru care o fracție algebrică are sens este numită *stabilirea condițiilor de existență* pentru această fracție.

Fracția algebrică scriindu-se sub forma unui raport, trebuie pusă condiția ca expresia algebrică de la numitor să nu se anuleze pentru nicio valoare atribuită variabilelor date.

Exemple

1. Pentru fracția algebrică $E(x)=\dfrac{x}{x+1}$, trebuie pusă condiția $x+1\neq 0$, adică $x\neq -1$. Așadar, $E(x)=\dfrac{x}{x+1}$ are sens pentru orice valoare reală a lui x diferită de -1.

2. Pentru $E(x,y)=\dfrac{x^3+xy+y^2+2}{x^2-9y^2}$, trebuie pusă condiția de existență $x^2-9y^2\neq 0$, adică $x\neq \pm 3y$. Așadar, $E(x,y)$ are sens pentru orice valori reale x și y cu $x\neq \pm 3y$.

✓ Amplificarea și simplificarea fracțiilor algebrice

Proprietate Dacă înmulțim sau împărțim atât numărătorul, cât și numitorul unei fracții algebrice cu aceeași expresie diferită de zero, valoarea fracției nu se modifică.

- În cazul înmulțirii, operația se numește amplificare.
- În cazul împărțirii, operația se numește simplificare.

Exemple

1. Amplificând fracția algebrică $\dfrac{x}{x-1}$ (unde $x\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$) cu $x+2,\ x+2\neq 0$, avem

$$\frac{x}{x-1}=\frac{x(x+2)}{(x-1)(x+2)}=\frac{x^2+2x}{x^2+x-2} \text{ unde } x\in\mathbf{R}\setminus\{-2,\ 1\}.$$

2. Amplificând fracția algebrică $\dfrac{1}{a\sqrt{3}+b\sqrt{2}}$ (unde $a\sqrt{3}+b\sqrt{2}\neq 0$) cu $a\sqrt{3}-b\sqrt{2}$, avem

$$\frac{1}{a\sqrt{3}+b\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{3}-b\sqrt{2}}{(a\sqrt{3}+b\sqrt{2})(a\sqrt{3}-b\sqrt{2})}=\frac{a\sqrt{3}-b\sqrt{2}}{3a^2-2b^2}, \text{ unde } a\sqrt{3}\pm b\sqrt{2}\neq 0.$$

3. Fracția algebrică $\dfrac{3x+3}{2x+2}=\dfrac{3(x+1)}{2(x+1)}$, unde $x\neq -1$ se simplifică prin $x+1$, obținând raportul $\dfrac{3}{2}$.

4. Fracția algebrică $\dfrac{3a^2-3b^2}{6a^2+12ab+6}=\dfrac{3(a^2-b^2)}{6(a^2+2ab+b^2)}=\dfrac{3(a-b)(a+b)}{6(a+b)^2}$, unde $a+b\neq 0$, se simplifică prin $3(a+b)$, obținând fracția algebrică $\dfrac{a-b}{2(a+b)}$.

PROBLEME

1 Fie fracția algebrica $\frac{-3x+4}{x-3}, x \in D, D \subset \mathbf{R}$.

a) Calculați valoarea fracției algebrice pentru $x = 1$ și pentru $x = -2$.
b) Aflați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care fracția are sens.

2 Fie fracția algebrică $\frac{2x}{x^2+3x}, x \in D \subset \mathbf{R}$.

a) Calculați valoarea fracției algebrice pentru $x = 1$ și pentru $x = \sqrt{2}$.
b) Puteți calcula valoarea fracției algebrice pentru $x = 0$ și pentru $x = -3$?

3 Fie fracția algebrică $\frac{2x-3}{x}$, unde $x \in \mathbf{R}^*$.
Amplificați această fracție pe rând cu:

a) $x^2, x \neq 0$; b) $x+1, x \neq -1$; c) $2x+3, x \neq -1,5$.

4 Fie fracția $\frac{x-3}{x+3}$, unde $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3\}$.
Amplificați această fracție pe rând cu:

a) $x, x \neq 0$; b) $x-3, x \neq 3$; c) $x+1, x \neq -1$.

5 Simplificați fracțiile algebrice:

a) $\frac{49x^3}{-7x}, x \neq 0$; b) $\frac{x^2+2x}{2x}, x \neq 0$;

c) $\frac{x^2-4}{x+2}, x+2 \neq 0$; d) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}, x \neq \pm 1$;

e) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}, x \neq \pm 2$;

f) $\frac{4x^2-1}{1+4x+4x^2}, x \neq -\frac{1}{2}$;

g) $\frac{x^3-x^2+x-1}{x^4-1}, x \neq \pm 1$;

h) $\frac{1-2x+x^2}{x^3-x^2}, x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$;

i) $\frac{ax+bx+a+b}{x^2-1}, x \in \mathbf{R} \setminus \{\pm 1\}, a, b \in \mathbf{R}$.

6 Arătați că valoarea fracției $\frac{n^2+8n+15}{n+5}$ este număr natural oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

7 Determinați numerele întregi $a \in \mathbf{Z} \setminus \{-2, -1\}$ pentru care valoarea fracției $\frac{3a+6}{a^2+3a+2}$ este număr întreg.

8 a) Arătați că valoarea fracției algebrice $\frac{n^2+9n+14}{n+2}$ este număr natural oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.
b) Determinați valorile lui $n \in \mathbf{Z} \setminus \{-1\}$ pentru care valoarea fracției $\frac{6n+6}{2n^2+5n+3}$ este număr întreg.

9 Amplificați fracțiile următoare, astfel încât ele să aibă același numitor:

a) $\frac{3}{5x}, \frac{2}{20x^2}, \frac{-3x+1}{2x^3}, x \neq 0$;

b) $\frac{2x}{x-2}, \frac{-3x}{x+2}, \frac{5x+1}{x^2-4}, x \neq \pm 2$;

c) $\frac{x+1}{x}, \frac{x}{x+1}, \frac{2x-1}{x^2+x}, x \neq 0, x \neq -1$.

10 Simplificați fracțiile algebrice următoare, astfel încât ele să aibă același numitor:

a) $\frac{x+1}{x^2-x-2}, \frac{x-2}{x^2-4x+4}, \frac{x+2}{x^2-4}$,
$x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, -2\}$;

b) $\frac{4x^2+4x}{x^2+2x}, \frac{x^2+x}{x^2+3x+2}, \frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+4}$,
$x \in \mathbf{R} \setminus \{0, -2, -1\}$.

11 Efectuați:

a) $3x-(+2x)-(-3x)-(+4x)$;
b) $-6x-(-5x)+(+2x)-(+3x)$;
c) $-4y-(-6y)+(+4y)-(+3y)$;
d) $-10x^2-(+3x^2)-(+2x^2)-(-4x^2)$;
e) $-4x^3+(+2x^3)-(-7x^3)-(+3x^3)$;
f) $6xy-(-5xy)-(+8xy)+(-xy)$.

12 Desfaceți parantezele și reduceți termenii asemenea:

a) $(3x-2)-(x+3)+(2x+4)+2x+3$;
b) $-(2x+3)+5x+(4-2x)-(-x+3)$;
c) $6x-(2x+y)+(x-4y)-(2y-3)$;
d) $(2x^2+2x-4)-(x^2+3x-7)+(-4x^2+x-8)$;
e) $-(3x^2-2x+2)+(x^2-x-1)-(2x^2+x-4)$.

13 Dacă $a=(x+3)^2+2(x+3)(x-3)+(x-3)^2$, $x \in \mathbf{Z}$, atunci arătați că numărul a este divizibil cu 4.

Lecția 5. Operații cu fracții algebrice (adunare, scădere, înmulțire, împărțire, ridicare la putere)

✓ Adunarea și scăderea fracțiilor algebrice

Adunarea și scăderea fracțiilor algebrice se efectuează analog cu adunarea și scăderea fracțiilor ordinare.

- Dacă fracțiile au același numitor, atunci se aplică formula:

$$\boxed{\frac{E}{G} \pm \frac{F}{G} = \frac{E \pm F}{G}}$$

- Dacă fracțiile nu au același numitor, prin amplificări convenabile, le aducem mai întâi la același numitor.

Exemple **1.** $\frac{2a}{x-5} + \frac{4a}{x-5} = \frac{2a+4a}{x-5} = \frac{6a}{x-5}$. **2.** $\frac{x}{6} - \frac{x}{10} = \frac{5x}{30} - \frac{3x}{30} = \frac{5x-3x}{30} = \frac{2x}{30} = \frac{x}{15}$.

3. $\frac{2x-1}{x+1} - \frac{3x-2}{2x+2} + \frac{x}{4} = \frac{2x-1}{x+1} - \frac{3x-2}{2(x+1)} + \frac{x}{4}$. Numitorul comun este $4(x+1)$.

Amplificăm prima fracție cu 4, a doua cu 2 și a treia cu $(x+1)$ și obținem

$$\frac{4(2x-1)-2(3x-2)+x(x+1)}{4(x+1)} = \frac{8x-4-6x+4+x^2+x}{4(x+1)} = \frac{x^2+3x}{4(x+1)}.$$

4. Amplificăm prima fracție cu -1 și avem:

$$\frac{2}{3-x} + \frac{3}{x-3} = \frac{-2}{x-3} + \frac{3}{x-3} = \frac{-2+3}{x-3} = \frac{1}{x-3}.$$

5. Amplificăm fiecare fracție cu numitorul celeilalte, obținem:

$$\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1)-(x+2)}{(x+2)(x+1)} = \frac{-1}{(x+2)(x+1)}.$$

6. $\frac{1}{a^2-4b^2} + \frac{1}{a^2+4ab+4b^2} = \frac{1}{(a-2b)(a+2b)} + \frac{1}{(a+2b)^2}$.

Numitorul comun este $(a-2b)(a+2b)^2$. Amplificând prima fracție cu $(a+2b)$ și pe cea de-a doua cu $(a-2b)$, obținem $\frac{a+2b+a-2b}{(a-2b)(a+2b)^2} = \frac{2a}{(a-2b)(a+2b)^2}$.

✓ Înmulțirea fracțiilor algebrice

Două fracții algebrice, $\frac{E}{F}$ și $\frac{G}{H}$ se înmulțesc astfel:

$$\boxed{\frac{E}{F} \cdot \frac{G}{H} = \frac{E \cdot G}{F \cdot H}}$$

Cu alte cuvinte, pentru a înmulți două fracții algebrice, înmulțim numărătorii între ei și numitorii între ei. Atunci când este posibil, descompunem numărătorii și numitorii în factori și efectuăm eventualele simplificări.

Exemple **1.** $\frac{x^3}{5x+10} \cdot \frac{30}{3x^2} = \frac{30x^3}{5(x+2) \cdot 3x^2} = \frac{2x}{x+2}$, unde $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 0\}$.

2. $\frac{x^2-7x+6}{x^2-36} \cdot \frac{x+6}{1-x^2} = \frac{(x-1)(x-6)}{(x-6)(x+6)} \cdot \frac{x+6}{-(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{x+1}$, unde $x \in \mathbf{R} \setminus \{-6, -1, 1, 6\}$.

✓ Împărțirea fracțiilor algebrice

Considerăm fracțiile algebrice $\frac{E}{F}$ și $\frac{F}{E}$. Avem $\frac{E}{F}\cdot\frac{F}{E}=1$. Spunem că $\frac{F}{E}$ este inversa fracției $\frac{E}{F}$ și scriem $\left(\frac{E}{F}\right)^{-1}=\frac{F}{E}$. Inversa unei fracții algebrice este definită doar pentru acele valori ale variabilelor care nu anulează nici numărătorul nici numitorul fracției.

Exemplu

Inversa fracției $\frac{x}{x+1}$ unde $x\in\mathbf{R}\setminus\{-1,\ 0\}$ este $\frac{x+1}{x}$. La fel fracția algebrică $\frac{x}{x+1}$ cu $x\in\mathbf{R}\setminus\{-1,0\}$ este inversa fracției $\frac{x+1}{x}$.

Pentru a împărți două fracții algebrice, se înmulțește prima fracție cu inversa celei de-a doua fracție. Deci:

$$\boxed{\frac{E}{F}:\frac{G}{H}=\frac{E}{F}\cdot\frac{H}{G}}$$

Exemple **1.** $\frac{x^2}{3}:\frac{x^2}{6}=\frac{x^2}{3}\cdot\frac{6}{x^2}=2$, unde $x\in\mathbf{R}^*$.

2. $\frac{3x-2x^2}{2x+2}:\frac{9-4x^2}{x^2-1}=\frac{x(3-2x)}{2(x+1)}\cdot\frac{(x-1)(x+1)}{(3-2x)(3+2x)}=\frac{x(x-1)}{2(2x+3)}$, unde $x\in\mathbf{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2},\ -1,\ 1,\ \frac{3}{2}\right\}$.

3. Fracția dintre aria discului de rază x și aria triunghiului echilateral de latură x este $\frac{\pi x^2}{\frac{x^2\sqrt{3}}{4}}=$

$=\pi x^2\cdot\frac{4}{x^2\sqrt{3}}=\frac{4\pi}{\sqrt{3}}=\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$.

✓ Ridicarea la putere a fracțiilor algebrice

Pentru a ridica o fracție algebrică la o putere cu exponent întreg, folosim formulele:

$$\boxed{\left(\frac{E}{F}\right)^n=\frac{E^n}{F^n};\quad \left(\frac{E}{F}\right)^{-n}=\left(\frac{F}{E}\right)^n,\ \text{unde } n\in\mathbf{N}}$$

Exemple **1.** $\left(\frac{1}{2x}\right)^2=\frac{1}{4x^2}$, unde $x\in\mathbf{R}^*$.

2. $\left(\frac{1}{2x}\right)^{-2}=(2x)^2=4x^2$, unde $x\in\mathbf{R}^*$. **3.** $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{-3}=\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^3$, unde $x\in\mathbf{R}\setminus\{-1,\ 2\}$.

Probleme rezolvate

1 Aflați valorile variabilelor pentru care au sens expresiile următoare și scrieți-le sub forma cea mai simplă: a) $E(x)=\left(\frac{x+3}{x-1}-\frac{x-2}{x+1}-\frac{6x}{x^2-1}\right):\frac{1}{x-1}$;

b) $E(a,\ b)=\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}-\frac{4a^2b^2}{b^2-a^2}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)\cdot\frac{1}{4ab+4}$;

c) $E(x,\ y)=\left[\frac{(x-2y)^2+8xy}{(x+2y)^2-8xy}\right]^{-2}\cdot\left(\frac{x^2+2xy}{x^2-2xy}\right)^3$.

<u>Soluție</u> a) Punem condițiile de existență: $x-1\neq 0$, $x+1\neq 0$, $x^2-1\neq 0$, deci $x\in\mathbf{R}\setminus\{-1,\ 1\}$.

$E(x)=\frac{(x+3)(x+1)-(x-2)(x-1)-6x}{(x-1)(x+1)}:\frac{1}{x-1}=$

$=\frac{x^2+x+3x+3-x^2+x+2x-2-6x}{(x-1)(x+1)}:\frac{1}{x-1}=\frac{x+1}{(x-1)(x+1)}\cdot(x-1)=1$.

b) Condițiile de existență sunt: $a \neq b$, $a \neq -b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $ab \neq -1$.

$$E(a,\, b)=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2+4a^2b^2}{(a+b)(a-b)}\cdot\frac{a^2+b^2+2ab}{ab}\cdot\frac{1}{4(ab+1)}=\frac{4ab+4a^2b^2}{(a+b)(a-b)}\cdot\frac{(a+b)^2}{ab}\cdot\frac{1}{4(ab+1)}=$$

$$=\frac{4ab(1+ab)}{(a+b)(a-b)}\cdot\frac{(a+b)^2}{ab}\cdot\frac{1}{4(ab+1)}=\frac{a+b}{a-b}.$$

c) $$E(x,y)=\left(\frac{x^2-4xy+4y^2+8xy}{x^2+4xy+4y^2-8xy}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{x^2+2xy}{x^2-2xy}\right)^3=\left(\frac{x^2+4xy+4y^2}{x^2-4xy+4y^2}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{x^2+2xy}{x^2-2xy}\right)^3=$$

$=\left[\frac{(x+2y)^2}{(x-2y)^2}\right]^{-2}\cdot\left[\frac{x(x+2y)}{x(x-2y)}\right]^3$, deci condițiile de existență pentru $E(x,y)$ sunt: $x \neq 2y$, $x \neq -2y$ și $x \neq 0$.

$$E(x,y)=\left[\frac{(x-2y)^2}{(x+2y)^2}\right]^2\cdot\left(\frac{x+2y}{x-2y}\right)^3=\frac{(x-2y)^4}{(x+2y)^4}\cdot\frac{(x+2y)^3}{(x-2y)^3}=\frac{x-2y}{x+2y}.$$

2 Fie expresia $E(x)=\frac{3x+2}{3x-1}:\left(1-\frac{3}{9x^2-1}\right)$.

a) Calculați $E(0)$.

b) Determinați valorile lui $x \in \mathbf{R}$ pentru care $E(x)$ nu este definită.

c) Rezolvați ecuațiile $E(x)=2$ și $E(x)=-2$.

d) Aflați valorile lui $x \in \mathbf{Z}$ pentru care $E(x) \in \mathbf{Z}$.

Soluție a) $E(0)=\frac{3\cdot 0+2}{3\cdot 0-1}:\left(1-\frac{3}{9\cdot 0-1}\right)=(-2):4=-\frac{1}{2}$;

b) $E(x)=\frac{3x+2}{3x-1}:\frac{9x^2-4}{9x^2-1}=\frac{3x+2}{3x-1}:\frac{(3x-2)(3x+2)}{(3x-1)(3x+1)}$.

Deci $E(x)$ nu este definită pentru $x \in \left\{-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right\}$.

c) $E(x)=\frac{3x+2}{3x-1}\cdot\frac{(3x-1)(3x+1)}{(3x-2)(3x+2)}=\frac{3x+1}{3x-2}$. Ecuațiile $E(x)=2$ și $E(x)=-2$ trebuie rezolvate în mulțimea $\mathbf{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right\}$. Ecuația $E(x)=2$ are soluția $x=\frac{5}{3}$.

Ecuația $E(x)=-2$ nu are soluții în mulțimea $\mathbf{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right\}$.

d) $E(x)=\frac{3x-2+3}{3x-2}=\frac{3x-2}{3x-2}+\frac{3}{3x-2}=1+\frac{3}{3x-2}$.

$E(x) \in \mathbf{Z}$ dacă $\frac{3}{3x-2} \in \mathbf{Z}$, adică $3x-2 \in \{-3,\ -1,\ 1,\ 3\}$. Găsim $x=1$.

PROBLEME

1 Efectuați:

a) $\frac{7x}{9}+\frac{5x}{9}$; b) $\frac{4x+1}{3a}-\frac{4x}{3a}$, $a\neq 0$;

c) $\frac{7}{36x^2}+\frac{7}{6x}-\frac{5}{x^2}$, $x\neq 0$; d) $\frac{5x}{6}-\frac{3x}{4}+\frac{x}{2}-\frac{2x}{3}$;

e) $\frac{5x}{x-2}-\frac{3x+5}{x-2}$; f) $4+\frac{5}{2x}$, $x\neq 0$;

g) $x+y+\frac{y^2}{x-y}$, $x\neq y$; h) $x+y+\frac{x^2}{y-x}$, $x\neq y$;

i) $\frac{x}{x+1}-1, x\neq -1$; j) $\frac{3}{x+1}-\frac{2}{3x+3}$, $x\neq -1$;

k) $\frac{10}{6x}+\frac{x+2}{6x^2}-\frac{5}{3x^2}$, $x\neq 0$;

l) $4+\frac{5-8x}{2x}$, $x\neq 0$; m) $x+1+\frac{1}{x-1}$, $x\neq 1$;

n) $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}$, $x\in \mathbf{R}\setminus\{1,-1\}$;

o) $\frac{x^3+x^2}{x+1}-\frac{x^3-x^2}{x-1}$, $x\in \mathbf{R}\setminus\{1, -1\}$;

p) $\frac{5x}{x-2}-\frac{4x}{x-2}+\frac{3x-5}{2-x}$, $x\in \mathbf{R}\setminus\{2\}$;

r) $\frac{-6}{x+3}+\frac{3x}{3-x}-\frac{3x^2-9}{x^2-9}, x\in \mathbf{R}\setminus\{3,-3\}$.

2 a) Arătați că:

$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+5}=\frac{5}{x(x+5)}$, $x\in \mathbf{R}\setminus\{0,-5\}$.

b) Calculați suma:

$\frac{5}{2\cdot 7}+\frac{5}{7\cdot 12}+\frac{5}{12\cdot 17}+\frac{5}{17\cdot 22}+\frac{5}{22\cdot 27}$.

3 Efectuați, impunând condițiile de existență:

a) $-\frac{16x}{9}\cdot\frac{-9}{x}$; b) $\frac{2x^2}{3y^4}\cdot\frac{y^5}{4x}$;

c) $\frac{(x-4)^2}{(x+4)^2}\cdot\frac{x+4}{x-4}$; d) $\frac{x^2-25}{(x-5)^2}\cdot\frac{2x+10}{x^2+10x+25}$.

4 Efectuați, impunând condițiile de existență:

a) $\frac{a^3x}{3}:\frac{2a^2}{24x}$; b) $\frac{12x^2}{4}:2x^2$;

c) $\frac{x^2-1}{x^2-4}:\frac{x-1}{x-2}$;

d) $\frac{x^2+3x+2}{x^2-4}:\frac{x^2-4x-5}{x^2-7x+10}$.

5 Un triunghi echilateral și un pătrat au perimetre egale. Calculați fracția dintre:

a) latura triunghiului echilateral și latura pătratului;

b) aria triunghiului echilateral și aria pătratului.

6 Efectuați, impunând condițiile de existență:

a) $\left(\frac{1}{x}\right)^{-3}$; b) $\left(-\frac{2}{3x}\right)^{2}$;

c) $\left(\frac{2xy^2}{3a}\right)^{-2}$; d) $\left(\frac{2x-3}{x-4}\right)^{-2}:\frac{x^2-16}{4x^2-9}$.

7 Efectuați, impunând condițiile de existență:

a) $\left(\frac{x^2+4}{4x}-1\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x}\right)$;

b) $\left(\frac{x}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x+2}\right):\left(x-2+\frac{10-x^2}{x+2}\right)$.

8 Efectuați:

a) $\frac{x-y}{x}-\frac{x+y}{y}-2$, $x, y\in \mathbf{R}^*$;

b) $\frac{a^2+a}{a+1}-\frac{a^2-a}{a-1}$, $a\in \mathbf{R}\setminus\{\pm 1\}$;

c) $\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x-1}+\frac{2x}{x^2-1}$, $x\in \mathbf{R}\setminus\{\pm 1\}$;

d) $\frac{x^2+4}{2x}-\frac{x^2}{2x+4}-\frac{x^2}{x^2+2x}$, $x\in \mathbf{R}\setminus\{0,-2\}$;

e) $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{1-x}+\frac{2}{x^2-1}$, $x\in \mathbf{R}\setminus\{\pm 1\}$;

f) $\frac{1}{x^2-9}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{3-x}$, $x\in \mathbf{R}\setminus\{\pm 3\}$.

9 a) Arătați că: $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x(x+1)}$, pentru orice $x\in \mathbf{R}\setminus\{0, -1\}$.

b) Calculați suma:

$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}$.

10 Arătați că sumele următoare sunt constante:

a) $\frac{3}{x-3}+\frac{x}{3-x}$, $x\neq 3$;

b) $\frac{5x+1}{x-2}+\frac{3x+5}{2-x}$, $x\neq 2$;

c) $\frac{x^2-2x+3}{2x-1}+\frac{x^2+2x+1}{1-2x}, x\neq \frac{1}{2}$.

11 Efectuați înmulțirile, impunând condițiile de existență:

a) $\frac{x^2}{3}\cdot\frac{6}{x^2}$;

b) $\frac{5a^2}{2}\cdot\left(-\frac{6}{a}\right)$; c) $\frac{10a^2}{12xy^2}\cdot\frac{36y^2}{5a}$;

d) $-4x\cdot\frac{5}{x^3}\cdot\frac{x^2}{4}$; e) $\frac{x^2-9}{x-3}\cdot\frac{1}{x+3}$;

f) $\frac{x^2-x}{x^2+x}\cdot\frac{2x^2+2x}{x}$; g) $\frac{a^2-4}{a^2-a}\cdot\frac{a-1}{a^2+2a}$.

12 Efectuați împărțirile, impunând condițiile de existență:

a) $\frac{5x}{6y} : \frac{2x}{12y}$; b) $\frac{-4x^6}{5y^2} : \frac{6x}{8y^2}$;

c) $\frac{x-1}{x+2} : \frac{x+1}{2x+4}$; d) $\frac{x^2+x}{x^2-16} : \frac{x+1}{x-4}$;

e) $\frac{x^2-4x+4}{y^2+y} : \frac{x^2-4}{1+y}$; f) $\frac{x^2-1}{9-4x^2} : \frac{1-x^2}{3x+2x^2}$.

13 Efectuați, impunând condițiile de existență:

a) $\left(\frac{1}{3x}\right)^{-1}$; b) $\left(\frac{2x}{3}\right)^{3}$; c) $\left(\frac{x}{x-3}\right)^{-2}$;

d) $\frac{x-1}{x+1} : \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-1}$; e) $\frac{x-1}{x+2} : \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-1}$.

14 Efectuați, impunând condițiile de existență:

a) $\left(\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x+2}\right) : \frac{2-5x}{x^2-4}$;

b) $\left(\frac{1}{x^2-2x}-\frac{1}{x^2+2x}+\frac{2}{x^2-4}\right) : \frac{2x+6}{x^3-4x}$;

c) $\left(\frac{4}{1+x}+\frac{4x}{1-x}+\frac{8x}{1-x^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+x}+\frac{x}{1-x}-\frac{2x}{1-x^2}\right)$;

d) $\frac{x-1}{4}\cdot\left[\frac{x+3}{x+1}-\frac{x+1}{x+4}\cdot\left(\frac{2x+3}{x-1}-1\right)\right]$.

15 Fie $E(x)=\frac{x^4+8x^2-9}{x^3-x}$.

a) Simplificați, punând condițiile de existență.

b) Arătați că $E(x)\geq 6$, pentru orice $x\in(1,\infty)$.

c) Determinați $x\in\mathbf{Z}$, pentru care $E(x)\in\mathbf{Z}$.

16 Alina îi propune colegei sale Raluca un test de inteligență și o roagă să efectueze pașii pe care ea îi dictează:

- Alege un număr diferit de 0 și 2 pe care-l numim număr secret.
- Calculează inversul acestui număr. Reținem acest prim număr.
- Împarte pe 2 la numărul secret micșorat cu 2. Reținem acest al doilea număr.
- Scade 1 din numărul secret, ridică rezultatul la pătrat, apoi scade acest rezultat din 1 și împarte 4 la rezultatul final. Acesta este al treilea număr pe care îl reții.
- Adună cele trei numere obținute la pașii anteriori.
- Spune-mi rezultatul și eu îți spun care este numărul tău secret!

Cum a aflat Alina numărul secret?

17 Fie $E(x)=\frac{2x^2+16x+32}{3x^2-48}$:

$:\left[\left(\frac{2x}{x+2}+\frac{2x}{6-3x}+\frac{8x}{x^2-4}\right):\frac{2x-8}{x-2}\right]$.

a) Puneți condițiile de existență pentru $E(x)$.

b) Aduceți $E(x)$ la forma cea mai simplă.

c) Determinați $x\in\mathbf{Z}$, pentru care $E(x)\in\mathbf{Z}$.

18 Fie $E(x)=\left(\frac{3}{x-1}-\frac{x}{x-1}\right):\frac{x^2+1}{x^2-1}:\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$.

a) Aflați valorile lui x pentru care $E(x)$ este definită (are sens).

b) Arătați că $E(x)$ poate fi scrisă sub forma $\frac{3-x}{x+1}$.

c) Aflați $x\in\mathbf{N}$, astfel încât $E(x)\geq 0$.

d) Aflați $x\in\mathbf{Z}$, astfel încât $E(x)\in\mathbf{N}$.

19 Fie $E(x)=\frac{(x+2)^2}{x^2-9}-\frac{x^2-3x}{x^2-6x+9}-\frac{x+3}{x^2+6x+9}$.

a) Determinați valorile lui x pentru care expresia are sens și arătați că $E(x)=\frac{7}{x^2-9}$.

b) Determinați $a\in\mathbf{Z}$, astfel încât $E(a)\in\mathbf{Z}$.

20 Adrian îi propune colegului său de bancă Ionuț să aleagă un număr real diferit de 1 și -1 pe care el să nu-l știe și apoi să parcurgă următorii pași:

- Scade 1 din pătratul numărului ales.
- Împarte rezultatul obținut la pasul anterior la numărul ales mărit cu 1.
- Înmulțește rezultatul obținut anterior cu inversul numărului micșorat cu 1.

În final, Adrian îi spune lui Ionuț că, dacă a rezolvat corect, trebuia să obțină rezultatul 1.

Cum a aflat Adrian rezultatul final?

Propuneți și voi colegului (colegei) de bancă un test asemănător.

21 Dănuț vrea să facă un truc cu cărțile de joc și îl roagă pe prietenul lui Radu să efectueze următorii pași:

- Alege o carte de pe masă și numărul de pe această carte va fi numărul tău secret.
- Calculează pătratul sumei dintre acest număr și 1.
- Calculează pătratul diferenței dintre numărul secret și 1.
- Calculează diferența rezultatelor obținute anterior, spune-mi rezultatul și îți comunic care este numărul tău secret.

Cum a aflat Dănuț numărul secret?

TEST DE AUTOEVALUARE

Recomandat pentru portofoliu personal

10p din oficiu

SUBIECTUL I - Pe foaia de rezolvare scrieți numai rezultatele. (30 de puncte)

5p 1. Rezultatul calculului $(3x+8x-5x):x$ este egal cu . . .

5p 2. Dacă scoatem factor comun pe $3x$, expresia $3x^2-6x$ devine . . .

5p 3. După simplificare, fracția algebrică $\frac{x^2-9}{3x-9}$ devine . . .

5p 4. Calculând $\frac{3}{x+1}+\frac{3x}{x+1}$, se obține . . .

5p 5. Dacă $E(x)=\frac{x}{x-3}+\frac{x-1}{x}$, atunci $E(2)=$ . . .

5p 6. Rezultatul calculului $(x-1)(x+1)-x^2$ este . . .

SUBIECTUL al II-lea - Precizați litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

5p 1. $E(x)=\frac{x^2-6}{x}$. Calculând $E(2)$ se obține:

A. -1 **B.** 1 **C.** -5 **D.** 5

5p 2. Dacă $x+\frac{1}{x}=2$, atunci $x^2+\frac{1}{x^2}$ este egal cu:

A. 6 **B.** 4 **C.** 0 **D.** 2

5p 3. Dacă $b+c=5$ și $b^2-c^2=45$, atunci valoarea expresiei $5b-5c$ este egală cu:

A. -25 **B.** -45 **C.** 45 **D.** -200

5p 4. Rezultatul calculului $(x-2x+3x)^2:(-4x)$ este egal cu:

A. x **B.** $-x$ **C.** $-\frac{x}{2}$ **D.** -1

5p 5. Rezultatul calculului $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}\cdot\frac{1}{x-1}$ este:

A. $x+1$ **B.** $x-1$ **C.** $\frac{1}{x+1}$ **D.** $\frac{x-1}{x+1}$

5p 6. Dacă $(x-2)^3-9x+18=(x+a)(x+b)(x+c)$, atunci $a+b+c$ este egală cu:

A. 8 **B.** -8 **C.** -6 **D.** 6

SUBIECTUL al III-lea Pe foaia de rezolvare scrieți rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Fie expresia $E(x)=(x+1)^2+2(x-7)+1$, unde $x\in\mathbf{R}$.

5p a) Arătați că $E(x)=(x-2)(x+6)$.

10p b) Arătați că $E(x)\geq-16$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$.

2. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{x-6}{x^2-25}-\frac{x}{5-x}-\frac{2}{x+5}\right):\frac{2x^2+x-6}{x^2-25}$.

5p a) Arătați că $E(x)=\frac{x+2}{2x-3}$, pentru orice $x\in\mathbf{R}\setminus\left\{-5,\ -2,\ \frac{3}{2},\ 5\right\}$.

10p b) Aflați $x\in\mathbf{Z}$, pentru care $E(x)\in\mathbf{Z}$.

Lecția 6. Ecuații de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbf{R}$

Definiție

- O ecuație de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbf{R}$ și $a \neq 0$ se numește *ecuație de gradul doi în necunoscuta x*.
- Numerele a, b și c se numesc *coeficienții* ecuației.
- Valorile lui x care înlocuite în ecuație conduc la propoziții adevărate se numesc *rădăcini* sau *soluții* ale ecuației.

Observație

Rezolvarea ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ în care $a = 0$ se reduce la rezolvarea ecuației $bx + c = 0$, care este cunoscută.

✓ Rezolvarea ecuației de gradul doi în cazuri particulare

Ecuații de forma $ax^2 + bx = 0$ (cazul $c = 0$)

Ecuația $ax^2 + bx = 0$ (unde $a \neq 0$) este echivalentă cu $x(ax + b) = 0$, deci mulțimea soluțiilor este $S = \left\{0, -\frac{b}{a}\right\}$.

Exemple

1. $5x^2 + 10x = 0$ echivalent cu $5x(x+2) = 0$, de unde $x = 0$ sau $x + 2 = 0$. Se obțin soluțiile $x_1 = 0$ și $x_2 = -2$. Mulțimea soluțiilor este $S = \{0, -2\}$.

2. $x^2 - \sqrt{2} \cdot x = 0$ echivalent cu $x(x - \sqrt{2}) = 0$ de unde $x = 0$ sau $x - \sqrt{2} = 0$. $S = \{0, \sqrt{2}\}$.

Ecuații de forma $ax^2 + c = 0$ (cazul $b = 0$)

Ecuația $ax^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$ este echivalentă cu $ax^2 = -c$ sau $x^2 = d$, unde $d = -\frac{c}{a}$.

Mulțimea soluțiilor ecuației $x^2 = d$, este $S = \begin{cases} \{-\sqrt{d}, \sqrt{d}\} & \text{dacă } d > 0 \\ \{0\} & \text{dacă } d = 0 \\ \varnothing & \text{dacă } d < 0 \end{cases}$.

Exemple

1. $x^2 = 9$, echivalent cu $x \in \{-3, 3\}$. Mulțimea soluțiilor este $S = \{-3, 3\}$.

2. $x^2 = 5$, echivalent cu $x \in \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$. Mulțimea soluțiilor este $S = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$.

3. $x^2 = 0$ dacă și numai dacă $x = 0$, deci mulțimea soluțiilor este $S = \{0\}$.

4. Ecuația $x^2 = -36$ nu are soluție, pentru că $x^2 \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$, iar $-36 < 0$. Deci nu există $x \in \mathbf{R}$ pentru care $x^2 = -36$, deci mulțimea soluțiilor este $S = \varnothing$.

5. $2x^2 - 50 = 0$, echivalent cu $x^2 = 25$, deci $S = \{-5, 5\}$.

6. $81x^2 - 4 = 0$, echivalent cu $x^2 = \frac{4}{81}$, deci $S = \left\{-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right\}$.

7. $-7x^2 - 2 = 0$, echivalent cu $x^2 = -\frac{2}{7}$, deci $S = \varnothing$.

✓ Formulă pentru rezolvarea ecuației de gradul doi

Vom deduce o formulă care permite determinarea soluțiilor oricărei ecuații de gradul doi. Pentru aceasta vom considera mai întâi următoarele situații:

Exemple

1. $2x^2 - 3x + 1 = 0$. Pentru a pune în evidență un pătrat perfect, înmulțim ambii membri ai ecuației cu 8 și obținem ecuația echivalentă $16x^2 - 24x + 8 = 0$, echivalent cu $16x^2 - 24x + 9 - 1 = 0$.

Deci $(4x-3)^2 = 1$, de unde $4x - 3 = 1$ sau $4x - 3 = -1$. Obținem $S = \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$.

2. $x^2 - 3x + 2,25 = 0$, echivalent cu $4(x^2 - 3x + 2,25) = 0$, de unde $4x^2 - 12x + 9 = 0$ sau $(2x-3)^2 = 0$. Obținem $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

3. $x^2 + 2x + 3 = 0$. echivalent cu $x^2 + 2x + 1 = -2$, de unde $(x+1)^2 = -2$. Ecuația nu are soluție, adică $S = \varnothing$.

Din aceste exemple deducem:

Reține!

O ecuație de gradul doi poate avea două soluții reale și diferite sau două soluții reale și egale, dar poate să nu aibă nicio soluție reală.

Deducerea formulei de rezolvare a unei ecuații de gradul doi

Considerăm ecuația de gradul doi $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a \neq 0$. Pentru a pune în evidență un pătrat perfect, înmulțim ecuația cu $4a$ și obținem ecuația echivalentă
$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$ echivalent cu $4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0$. Deci $(2ax+b)^2 = b^2 - 4ac$.

Definiție

Numărul $b^2 - 4ac$ se numește *discriminantul* ecuației și se notează cu litera Δ (se citește *delta*) din alfabetul grecesc.

Notând $2ax + b = y$, obținem ecuația $y^2 = \Delta$, având ca necunoscută pe y. Existența soluțiilor acestei ecuații (deci și a ecuației inițiale) depinde de semnul discriminantului.

- Dacă $\Delta > 0$, obținem $y = \pm\sqrt{\Delta}$, adică $2ax + b = \pm\sqrt{\Delta}$, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. În concluzie, ecuația are în acest caz două rădăcini reale $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_1 \neq x_2$.
- Dacă $\Delta = 0$, obținem $y = 0$, adică $2ax + b = 0$, de unde $x = \dfrac{-b}{2a}$. În acest caz $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$.
- Dacă $\Delta < 0$, ecuația nu are nicio soluție reală.

Observație

În cazul $\Delta = 0$, formula $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ rămâne adevărată; obținem în acest caz rădăcinile $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$.

Reține!

Algoritmul de rezolvare a ecuației $ax^2+bx+c=0$ cu $a\neq 0$ este următorul:

- Se calculează discriminantul ecuației, $\Delta=b^2-4ac$.
- Dacă $\Delta\geq 0$, soluțiile sunt date de formula $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$.
  dacă $\Delta>0$, soluțiile sunt distincte (diferite);
  dacă $\Delta=0$, soluțiile sunt egale, și anume $x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}$.
- Dacă $\Delta<0$, ecuația nu are soluții reale.

Probleme rezolvate

1 Rezolvați în **R** ecuațiile:

a) $3x^2+7x+2=0$; b) $4x^2-4x+1=0$; c) $x^2-2x+7=0$.

Soluție a) $a=3,\ b=7,\ c=2$. $\Delta=b^2-4ac=7^2-4\cdot3\cdot2=25>0$. Ecuația are două soluții reale diferite: $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-7\pm5}{6}$. Rezultă $x_1=-2$ și $x_2=-\dfrac{1}{3}$. $S=\left\{-2,\ -\dfrac{1}{3}\right\}$.

b) $4x^2-4x+1=0,\ a=4,\ b=-4,\ c=1$. $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot4\cdot1=0$. Ecuația are două rădăcini reale egale $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{1}{2}$. c) $x^2-2x+3=0,\ a=1,\ b=-2,\ c=3$. $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot1\cdot3=-8<0$. Rezultă că ecuația nu are rădăcini reale, adică $S=\varnothing$.

2 Rezolvați prin două metode ecuația $x^2+x(\sqrt{7}+\sqrt{2})+\sqrt{14}=0$.

Soluție Avem $a=1,\ b=\sqrt{2}+\sqrt{7},\ c=\sqrt{14}$, deci

$$\Delta=b^2-4ac=(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2-4\sqrt{14}=7+2\sqrt{14}+2-4\sqrt{14}=7-2\sqrt{14}+2=(\sqrt{7}-\sqrt{2})^2.$$

Obținem $x_{1,2}=\dfrac{-(\sqrt{7}+\sqrt{2})\pm(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{2}$, de unde $x_1=-\sqrt{7}$ și $x_2=-\sqrt{2}$.

Altă metodă se bazează pe descompunerea în factori. Avem

$$x^2+x(\sqrt{7}+\sqrt{2})+\sqrt{14}=x^2+x\sqrt{7}+x\sqrt{2}+\sqrt{14}=x(x+\sqrt{7})+\sqrt{2}(x+\sqrt{7})=(x+\sqrt{7})(x+\sqrt{2}).$$

Ecuația se scrie $(x+\sqrt{7})(x+\sqrt{2})=0$, deci $x+\sqrt{7}=0$ sau $x+\sqrt{2}=0$, de unde $x_1=-\sqrt{7}$ și $x_2=-\sqrt{2}$.

3 Se consideră ecuația $ax^2+bx+c=0$, unde $a,b,c\in\mathbf{R}$, $a\neq0$, cu rădăcinile reale x_1 și x_2.

a) Arătați că $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$; $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

b) Folosind rezultatul de la punctul a), demonstrați că are loc descompunerea: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

c) Descompuneți în factori expresia x^2-5x+6.

Soluție a) Rădăcinile x_1 și x_2 fiind reale, au forma $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ și $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Atunci $x_1+x_2=$ $=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=-\dfrac{b}{a}$ și $x_1\cdot x_2=\left(\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\cdot\left(\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=\dfrac{b^2-\Delta}{4a^2}=\dfrac{4ac}{4a^2}=\dfrac{c}{a}$.

b) Din punctul a) în expresia ax^2+bx+c putem să înlocuim $b=-a(x_1+x_2)$, respectiv $c=ax_1x_2$. Atunci: $ax^2+bx+c=ax^2-ax(x_1+x_2)+ax_1x_2=a(x^2-x\cdot x_1-x\cdot x_2+x_1x_2)=a[x(x-x_1)-x_2(x-x_1)]=$ $=a(x-x_1)(x-x_2)$.

c) Pentru a descompune în factori expresia x^2-5x+6, rezolvăm mai întâi ecuația atașată, și anume: $x^2-5x+6=0$. Se obțin rădăcinile reale $x_1=2$ și $x_2=3$. Folosind punctul b) are loc descompunerea: $x^2-5x+6=$ $=(x-2)(x-3)$.

Comentariu Relațiile stabilite la punctul a) poartă numele de *Relațiile lui Viète*.

PROBLEME

1 Copiați și completați tabelul:

Ecuația $ax^2+bx+c=0$	a	b	c
$2x^2-5x-2=0$			
$2,5x^2-3x=0$			
$-x^2+4x-2=0$			
$2x-x^2=0$			
$2-3x^2=0$			
	1	-1	-2
	-4	4	0
	$\sqrt{2}$	0	-1
	-1	2	-3

2 Se dă mulțimea $A=\{\sqrt{2},\ 1,2,\ -3,\ -1\}$.
Precizați care dintre elementele mulțimii A sunt soluții ale ecuațiilor : a) $x^2-1=0$;
b) $x^2-x-6=0$; c) $x^2-x=0$.

3 Rezolvați în **R** ecuațiile:
a) $x^2-9=0$; b) $x^2-4=0$;
c) $x^2=0$; d) $x^2=-7$;
e) $x^2=8$; f) $4x^2-16=0$;
g) $5x^2=10$; h) $\sqrt{2}x^2=24\sqrt{2}$;
i) $6x^2=-1930$; j) $x^2-40x=0$;
k) $9x^2+6x=0$; l) $20x^2+2\sqrt{2}x=0$;

4 Stabliți numărul elementelor fiecăreia dintre mulțimile:
a) $\{x\in \mathbf{R}\mid 2x^2+4x+2=0\}$;
b) $\{x\in \mathbf{R}\mid 2x^2-3x+1=0\}$;
c) $\{x\in \mathbf{R}\mid 4x^2-4x-1=0\}$;
d) $\{x\in \mathbf{R}\mid x^2+3x+2=0\}$.

5 Determinați mulțimile:
a) $\{x\in \mathbf{Q}\mid 2x^2-1=0\}$;
b) $\{x\in \mathbf{Z}\mid 2x^2-5x+2=0\}$;
c) $\{x\in \mathbf{N}\mid 36-x^2=0\}$;
d) $\{x\in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\mid x^2+x-3=0\}$;
e) $\{x\in \mathbf{N}^*\mid x^2+x=0\}$;
f) $\{x\in \mathbf{R}\mid x^2+x+1=0\}$.

6 Rezolvați în **R** ecuațiile:
a) $x^2-9x+14=0$; b) $x^2-17x+30=0$;
c) $x^2-15x+150=0$;
d) $5x^2+14x-3=0$; e) $9x^2-12x+4=0$;
f) $(x+2)^2+(x+3)^2=10x+13$;
g) $(x-2)^2+2x^2=4x+7$; h) $\frac{x+3}{x+4}=\frac{1-x}{x-2}$;
i) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}=0$.

7 Determinați $a\in \mathbf{R}$, știind că ecuația $(a-1)x-2=0$ are soluția $x=a$.

8 Rezolvați în **R** ecuațiile următoare:
a) $x^2=100$; b) $x^2+100=0$;
c) $9x^2-1=0$; d) $x^2-\sqrt{3}x=0$;
e) $-7x+x^2=0$; f) $4x=2\sqrt{3}x^2$.

9 Rezolvați în **R** ecuațiile următoare:
a) $49x^2-14x+1=0$; b) $2x^2-5x+2=0$;
c) $2x^2-3x+5=0$;
d) $x^2+(x+3)^2-(x+4)^2=-4(x+1)$;
e) $25x^2-24x-1=0$; f) $2x^2-7x+5=0$;
g) $6x^2+x-1=0$; h) $\frac{1}{x^2+1}=\frac{2}{5x}$;
i) $\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2x^2-3x+1}$.

10 Rezolvați în **R** ecuațiile:
a) $(2x-5)(3x-7)=0$;
b) $(4-x)(x+\sqrt{2})=0$;
c) $x(x-2)-3(x-2)=0$;
d) $x(x+5)=3(x-5)$;
e) $5x^2-2x\sqrt{5}+1=0$;
f) $x^2-x+\pi-\pi^2=0$;
g) $x^2+x(1-\pi)-\pi=0$;
h) $x^2\sqrt{6}-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+1=0$.

11 Aflați valoarea lui m și rezolvați ecuația $x^2+m^2x+3=0$, știind că o rădăcină este -1.

Lecția 7. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuației de gradul doi

Prezentăm în continuare câteva tipuri de probleme practice a căror rezolvare se face cu ajutorul ecuației de gradul doi.

1 Aria unui triunghi dreptunghic este de $14\,\text{cm}^2$, iar diferența catetelor este de 3 cm. Calculați lungimile catetelor.

Soluție Notăm una dintre catete cu x, deci cealaltă catetă este $x+3$. Ecuația problemei este: $\frac{x(x+3)}{2}=14 \Leftrightarrow x^2+3x-28=0$. Rădăcinile ecuației sunt 4 și -7. Cum x este lungimea unui segment, avem $x>0$, deci lungimile catetelor sunt 4 cm și 7 cm.

2 Punctul M împarte segmentul AB în două părți AM și MB, astfel încât $\frac{AB}{AM}=\frac{AM}{MB}$. Calculați raportul $\frac{AM}{MB}$.

Soluție Notăm $AM=a,\ MB=b$ și $x=\frac{AB}{AM}$, deci $x=\frac{a}{b}$. (Vezi *Figura* 2.)

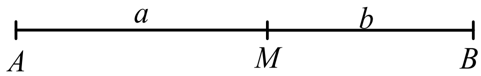


Figura 2

Relația $\frac{AB}{AM}=\frac{AM}{MB}$ se scrie $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$ echivalent cu $1+\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$, de unde $1+\frac{1}{x}=x$. Deci $x^2-x-1=0$.

Soluțiile sunt $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Cum $x>0$, răspunsul problemei este $\frac{AM}{MB}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Comentariu Numărul $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ este numit *numărul de aur*. Proporția $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$ este numită *proporția de aur* sau *proporția divină*. Numărul de aur joacă un rol important în matematică, dar este prezent atât în natură, în alcătuirea ființelor vii, cât și în domeniul creației umane: în pictură, sculptură, arhitectură. Proporția de aur existentă între părțile componente ale unei opere de artă îi conferă acesteia echilibru, armonie și frumusețe.

Temă pentru lucru în echipe

Folosind Internetul, realizați un referat în care să evidențiați legătura dintre șirul lui *Fibonacci*, cu care ați făcut cunoștință, și numărul de aur. Acest referat va fi adăugat la portofoliul vostru individual.

3 Se consideră în spațiu n puncte, astfel încât oricare trei dintre ele sunt necoliniare. Unind punctele două câte două în toate modurile posibile, se obțin 120 de drepte. Aflați numărul n.

Soluție Notăm punctele cu $A_1, A_2, ..., A_n$. Dreptele distincte obținute unind punctele două câte două în toate modurile posibile sunt:

$$\begin{array}{cccccc}
A_1A_2, & A_1A_3, & A_1A_4, & \dots & A_1A_{n-1}, & A_1A_n,\\
 & A_2A_3, & A_2A_4, & \dots & A_2A_{n-1}, & A_2A_n,\\
 & & A_3A_4, & \dots & A_3A_{n-1}, & A_3A_n,\\
 & & & \dots & \dots & \dots\\
 & & & & A_{n-2}A_{n-1}, & A_{n-2}A_n,\\
 & & & & & A_{n-1}A_n.
\end{array}$$

Deci numărul dreptelor este $(n-1)+(n-2)+(n-3)+...+2+1=1+2+...+(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}$.

Putem justifica și altfel:

Fiecare dintre cele n puncte se unește cu fiecare dintre celelalte $n-1$ puncte; $n(n-1)$ reprezintă dublul numărului de drepte (pentru că fiecare dreaptă a fost numărată de două ori). Deci numărul dreptelor este $\frac{n(n-1)}{2}$.

Ecuația problemei este $\frac{n(n-1)}{2}=120$, având soluțiile 16 și -15. Cum $n\in\mathbf{N}$, răspunsul problemei este $n=16$.

4 Există un poligon care să aibă 30 de diagonale?

Soluție Notăm cu n numărul laturilor unui poligon, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 4$. Fiecare dintre cele n vârfuri este unit cu $n-3$ vârfuri (pentru că dintre cele $n-1$ vârfuri diferite de vârful considerat, două sunt alăturate acestuia, deci nu formează diagonale).

Produsul $n(n-3)$ reprezintă dublul numărului diagonalelor (pentru că fiecare diagonală a fost numărată de două ori). Rezultă că numărul diagonalelor poligonului cu n laturi este $\frac{n(n-3)}{2}$.

Rezolvând ecuația $\frac{n(n-3)}{2} = 30$, găsim $n_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{249}}{2}$ care nu sunt numere naturale. Deci nu există niciun poligon cu 30 de diagonale.

PROBLEME

1 Produsul a două numere întregi impare consecutive este 255. Aflați numerele.

2 Suma a două numere reale este 18, iar produsul este -40. Aflați numerele.

3 Determinați numărul real care este mai mic cu 240 decât pătratul său.

4 Înălțimea unui triunghi este mai mare decât baza lui cu 10 cm, iar aria triunghiului este de 468 cm^2. Aflați baza și înălțimea triunghiului.

5 Un triunghi dreptunghic are perimetrul de 56 cm, iar una dintre catete este cu 1 cm mai mică decât ipotenuza. Calculați lungimile laturilor.

6 În *Figura* 3, $MN \parallel BC$. Aflați valoarea lui x.

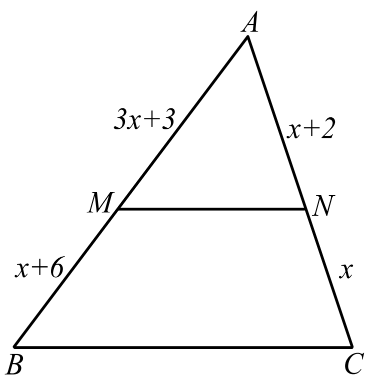


Figura 3

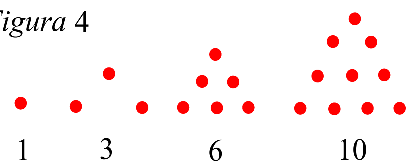
7 Aflați valoarea lui $a \in \mathbf{R}$, știind că distanța de la originea sistemului cartezian la punctul $A(a, a+2)$ este 10.

8 Aflați numărul laturilor unui poligon, știind că are 44 de diagonale.

9 Mulțimile A și B sunt disjuncte. Știind că $A \cup B$ are 15 elemente iar $A \times B$ are 44 elemente, aflați câte elemente are fiecare dintre mulțimile A și B.

10 Numerele $1, 3, 6, 10, \ldots$ au fost numite de *Pitagora „numere triunghiulare”* deoarece pot fi reprezentate sub forma următoare:

Figura 4



Ce loc ocupă în șirul numerelor triunghiulare (așezate în ordine crescătoare), numărul 136 ?

11 O scară este alcătuită din paralelipipede dreptunghice de dimensiuni egale (vezi *Figura* 5). Câte trepte are o astfel de scară, dacă pentru construirea ei s-au folosit 36 de paralelipipede?

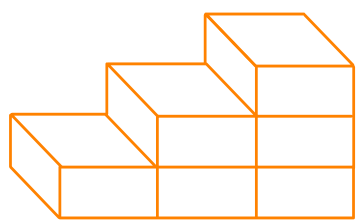


Figura 5

12 Produsul lungimilor catetelor unui triunghi dreptunghic este 48 cm, iar ipotenuza este de 10 cm. Aflați lungimile catetelor.

13 Perimetrul unui dreptunghi este de 70 cm, iar diagonala sa are o lungime de 25 cm. Aflați aria dreptunghiului.

PROBLEME RECAPITULATIVE

Recomandate pentru portofoliu personal

1 Rezolvați ecuațiile: a) $(x+2)(x+3)-(x+1)(x+4)=x^2$; b) $(x+\sqrt{2})^2+(x-\sqrt{2})^2=3x^2$;
c) $\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{3}{x^2-x+1}$; d) $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}=0$; e) $(x+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-1=0$.

2 Dacă luăm la întâmplare un număr întreg din intervalul $(-\sqrt{15}, \sqrt{20})$, care este probabilitatea ca aceasta să verifice ecuația $x^2+5x+4=0$?

3 Lungimea unui dreptunghi este mai mare decât lățimea cu 8 cm, iar aria este de $308\,\text{cm}^2$. Aflați dimensiunile dreptunghiului.

4 Aflați valoarea lui $a \in \mathbf{R}$, știind că distanța de la originea sistemului cartezian la punctul $A(a, a+2)$ este 10.

5 Demonstrați că numărul $\sqrt{2^{2n}+2^{n+1}+1}$ este natural pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

6 Știind că $a^2+b^2+c^2=60$ și $a+b+c=12$, calculați $ab+bc+ca$.

7 a) Scrieți ca produs de doi factori $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$.
b) Scrieți ca produs de patru factori $(ac+bd)^2-(ad+bc)^2$.

8 Calculați:
a) $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$; b) $\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$.

9 Demonstrați că, dacă $\frac{2x+3y}{3x-y}=\frac{2y+3x}{3y-x}$, atunci $|x|=|y|$.

10 Considerăm expresia $E(x)=\left[\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2-2\right]\cdot\left(\frac{1}{x^2}-1\right)$.

a) Aflați valorile reale ale lui x pentru care $E(x)$ are sens.
b) Aduceți $E(x)$ la forma cea mai simplă.
c) Rotunjiți la zecimi numărul $E(\sqrt{2}-1)$.
d) Aflați valorile lui $x \in \mathbf{Z}$ pentru care $E(x) \in \mathbf{Z}$.

11 Verificați că oricare ar fi a, b, c numere reale are loc egalitatea:
$$(a+b-c)^2+(a-b+c)^2+(-a+b+c)^2+(a+b+c)^2=4(a^2+b^2+c^2).$$

12 Verificați egalitatea: $\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}}+\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}}=4.$

13 Demonstrați că dacă x, y sunt numere reale strict pozitive și $x^2+y^2+xy=3$, atunci $x+y\le 2$.

14 Laturile unui triunghi au lungimile $a=2\sqrt{3}$, $b=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $c=\sqrt{6}-1$. Stabiliți natura triunghiului.

15 Fie ecuația $mx^2+(2m-1)x+m-1=0$ unde m este un număr real diferit de zero.
a) Rezolvați ecuația pentru $m=2$.
b) Aflați valoarea numărului real m astfel încât $x=3$ să fie soluție a ecuației.
c) Arătați că pentru orice m, număr real diferit de zero, ecuația are o soluție număr întreg.

16 Știind că $A=100^2+200^2+300^2+\ldots+1900^2$ și $B=99\cdot101+199\cdot201+299\cdot301+\ldots+1899\cdot1901$, calculați $A-B$.

17 Fie $a=\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}$,
$b=(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})+(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})+\ldots+(\sqrt{2007}-\sqrt{2009})(\sqrt{2007}+\sqrt{2009})$.
Calculați $\frac{a}{b}$ și $(b+7)^{\frac{a}{2}}$.

18 Se dă expresia $E(x)=(x+3)\cdot\dfrac{x-3}{x^2-9}+\dfrac{1}{x-3}$, $x\in D\subset\mathbf{R}$.

a) Determinați valorile lui $x\in\mathbf{R}$ pentru care $E(x)$ are sens.

b) Calculați $E(1)+E(5)$. c) Aflați valorile lui $x\in\mathbf{Z}$ pentru care $E(x)\in\mathbf{Z}$.

19 Fie expresia $E(x)=\left(\dfrac{2x}{x+1}+2\right):\left(1-\dfrac{3x^2}{1-x^2}\right)$, $x\in D\subset\mathbf{R}$.

a) Determinați valorile lui $x\in\mathbf{R}$ pentru care $E(x)$ nu este definită.

b) Calculați $E(2)$ și $E\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

c) Arătați că $E(x)=\dfrac{2x-2}{2x-1}$.

d) Determinați valorile lui $x\in\mathbf{Z}$ pentru care $E(x)\in\mathbf{Z}$.

20 Fie $E(x)=\left[\dfrac{4}{4-x^2}+\left(2+\dfrac{x-2}{2}\right):\left(\dfrac{x+2}{2}-2\right)\right]:(x^2+4x)$, unde $x\in\mathbf{R}\setminus\{\pm2\}$.

a) Aduceți $E(x)$ la forma cea mai simplă.

b) Dacă $E(x)=\dfrac{1}{(x-2)(x+2)}$, calculați $E(3)+E(4)+E(5)+\ldots+E(20)$.

c) Determinați valorile lui $x\in\mathbf{Z}$ pentru care $E(x)\cdot(x+2)\in\mathbf{Z}$.

21 Fie expresia $E(x)=x-\left(\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{7-x^2}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x-3}\right):\dfrac{x+2}{2(x-1)}$, unde $x\in\mathbf{R}\setminus\{-2,1,3\}$.

a) Arătați că $E(x)=x+2$.

b) Calculați $E(4)+E(5)+E(6)+\ldots+E(30)$.

22 Se consideră expresia, $E(x)=\left(\dfrac{a}{a+1}\right)^2+a^2+1$, $a\in\mathbf{R}\setminus\{-1\}$.

a) Calculați $E(2)+E(-2)$;

b) Arătați că $E(a)\geq1$ pentru orice $a\in\mathbf{R}\setminus\{-1\}$.

23 Fie expresia $E(x)=\dfrac{\dfrac{x-3}{x+3}-\dfrac{x+3}{x-3}}{\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{2}{x-3}}$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{-3,3\}$. Calculați suma: $E(4)+E(5)+\ldots+E(2000)$.

24 Fie $E(x)=\left(\dfrac{x}{x-3}+\dfrac{x-3}{x}-1\right):\dfrac{x^2-3x+9}{3x}$.

a) Demonstrați că $x^2-3x+9\geq\dfrac{27}{4}$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$.

b) Aflați valorile lui $x\in\mathbf{R}$ pentru care $E(x)$ nu este definită.

c) Demonstrați că $E(x)=\dfrac{3}{x-3}$.

d) Aflați valorile lui $x\in\mathbf{Z}$ pentru care $E(x)\in\mathbf{Z}$.

e) Calculați $\dfrac{E(4)}{4}+\dfrac{E(5)}{5}+\dfrac{E(6)}{6}+\ldots+\dfrac{E(50)}{50}$.

TEST DE AUTOEVALUARE

Recomandat pentru portofoliu personal

10p din oficiu

SUBIECTUL I - Pe foaia de rezolvare scrieți numai rezultatele. (30 de puncte)

5p 1. Soluțiile reale ale ecuației $2x^2+3x=0$ sunt $x_1 = ...$ și $x_2 = ...$

5p 2. Mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $9x^2-1=0$ este . . .

5p 3. Mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $x^2+x-20=0$ este . . .

5p 4. Mulțimea soluțiilor reale ale ecuației x^2-x+1 este . . .

5p 5. Suma rădăcinilor reale ale ecuației $2x^2-8x+1=0$ este egală cu . . .

5p 6. Un pătrat are aria $12\,\text{cm}^2$. Perimetrul pătratului este . . . cm.

SUBIECTUL al II-lea - Precizați litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

5p 1. Mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $\frac{2}{x+2}=\frac{x-2}{2}$ este:
A. $\{2;-2\}$ **B.** $\{-\sqrt{2};2\}$ **C.** $\{2\sqrt{2}\}$ **D.** $\{-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\}$

5p 2. Mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care ecuația $x^2-2x+m=0$ are soluții reale este:
A. $[1,\infty)$ **B.** $(-\infty,1]$ **C.** $[0,1]$ **D.** $(-\infty,1)$

5p 3. Mulțimea valorilor întregi ale lui m pentru care ecuația $x^2+mx+9=0$ are rădăcinile egale este:
A. $\{-6;6\}$ **B.** $\{6\}$ **C.** $\{-6\}$ **D.** $\{0,6\}$

5p 4. Numărul soluțiilor reale ale ecuației $x^2+(m+2)x+m^2+m+2=0$, $m\in\mathbf{R}$, este:
A. 1 **B.** 2 **C.** depinde de m **D.** 0

5p 5. Dacă x_1 și x_2 sunt soluțiile reale ale ecuației $x^2+2mx+m^2-1=0$, $m\in\mathbf{R}$, atunci $|x_1-x_2|$ are valoarea:
A. 0 **B.** 2 **C.** $2|m|$ **D.** -2

5p 6. Un dreptunghi are lungimea cu 3 cm mai mare decât lățimea și aria $108\,\text{cm}^2$. Perimetrul dreptunghiului este:
A. 42 cm **B.** 21 cm **C.** 54 cm **D.** 27 cm

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de rezolvare scrieți rezolvările complete. (30 de puncte)

5p 1. Rezolvați în **R** ecuația $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}=0$, punând în prealabil condițiile de existență.

15p 2. Fie $E(x)=ax^2+bx+c$, unde $a,b,c\in\mathbf{R}$.
a) Pentru $a=3$, $b=-4$ și $c=1$, rezolvați în **R** ecuația $E(x)=0$.
b) Pentru $a=b=1$ și $c=-1$, rezolvați în **R** ecuația $|E(x)-x^2|+|E(x)-x|=0$.
c) Pentru $a=b=4$ și $c=5$, aflați valoarea minimă a lui $E(x)$ când $x\in\mathbf{R}$.

3. Fie ecuația $x^2+2(m+1)x+m^2+m-1=0$, $m\in\mathbf{R}$.
5p a) Determinați m, știind că ecuația are soluția $-m$.
5p b) Determinați m pentru care ecuația are două soluții reale diferite.

3 FUNCȚII

Lecția 1. Funcții definite pe mulțimi finite, exprimate cu ajutorul unor diagrame, tabele, formule

În viața de toate zilele, folosim adesea cuvântul *funcție*, pentru a exprima faptul că rezultatul unui anumit fenomen depinde de unul sau de mai mulți factori. De exemplu, timpul necesar parcurgerii unei distanțe date este în funcție de viteză. Când cumpărăm un obiect, îl alegem în funcție de preț și de calitate.

În matematică, noțiunea de funcție are un înțeles precis. Funcțiile joacă un rol fundamental, nu numai sub aspect teoretic (în matematică și în științele ce folosesc aparatul matematic), ci și din punctul de vedere al aplicațiilor matematicii în practică.

✓ Noțiunea de funcție

Definiție

- Fiind date două mulțimi nevide A, B și un procedeu f prin care se asociează fiecărui element x din mulțimea A un singur element, notat $f(x)$, din mulțimea B, spunem despre tripletul (A, f, B) că reprezintă o *funcție* definită pe A cu valori în B.
- Această funcție se notează $f: A \to B$.
- Pentru fiecare $x \in A$, elementul $f(x) \in B$ se numește *imaginea* lui x prin funcția f.
- Mulțimea A reprezintă *domeniul de definiție*, iar mulțimea B reprezintă *codomeniul* sau *mulțimea în care funcția ia valori*.

Leonhard Euler, mare matematician elvețian, s-a născut la 15 aprilie 1707 în Basel. El a avut o contribuție fundamentală în analiza matematică și a creat teoria funcțiilor. Euler a lucrat în aproape toate ramurile matematicii, printre care: geometrie, trigonometrie, algebră și teoria numerelor. El a introdus noțiunea de funcție și a fost primul care a notat $f(x)$ pentru aplicarea funcției f elementului x.

Observație Din definiția unei funcții nu rezultă neapărat că orice element din codomeniu trebuie să fie imaginea unui element din domeniul de definiție.

Exemplu Fie A o mulțime formată din șapte elevi participanți la un test la care se acordă note întregi între 1 și 10. Notăm cu B mulțimea acestor note. Procedeul prin care fiecărui elev din mulțimea A îi asociem nota obținută din mulțimea B îl vom nota cu f. Am definit astfel o funcție $f: A \to B$ care îndeplinește condițiile din definiție, deși nu toate elementele din codomeniu sunt imagini ale unor elemente din domeniul de definiție.

Observație Dacă $f: A \to B$ este o funcție, atunci trebuie făcută distincție între expresia f care este un procedeu de corespondență între elementele lui A și B și expresia $f(x)$, $x \in A$, care reprezintă un element din mulțimea B.

Funcțiile definite pe mulțimi finite pot fi exprimate în mai multe moduri.

✓ Funcții definite pe mulțimi finite exprimate cu ajutorul unui tabel

În *Figura* 1 este reprezentată o țintă asupra căreia s-au lansat patru săgeți numerotate de la 1 la 4, precum și punctajele obținute la aceste lansări. Putem să notăm aceste rezultate cu ajutorul unui tabel, astfel:

1	2	3	4
80	70	100	80

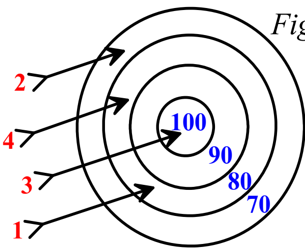


Figura 1

Acest tabel arată că, atunci când a fost lansată săgeata numărul 1, au fost obținute 80 de puncte, la lansarea săgeții numărul 2 au fost obținute 70 puncte etc. Tabelul exprimă corespondența dintre mulțimea săgeților $\{1, 2, 3, 4\}$ și punctajele obținute din mulțimea $\{70, 80, 90, 100\}$.

Astfel, elementului 1 îi corespunde elementul 80, elementului 2 îi corespunde elementul 70, elementului 3 îi corespunde elementul 100, iar elementului 4 îi corespunde elementul 80. Aceste corespondențe le putem scrie:

$$1 \to 80;\ 2 \to 70;\ 3 \to 100;\ 4 \to 80.$$

Notăm $t: \{1, 2, 3, 4\} \to \{70, 80, 90, 100\}$ și citim *funcția t* (tragere la țintă) *definită pe mulțimea* $\{1, 2, 3, 4\}$ (a săgeților) *cu valori în mulțimea* $\{70, 80, 90, 100\}$ (a rezultatelor).

Notația $t(x)$ care se citește *„t de x”* exprimă faptul că variabilei x îi corespunde valoarea $t(x)$ (imaginea variabilei x prin funcția t). Astfel, avem $t(1) = 80$, $t(2) = 70$, $t(3) = 100$, $t(4) = 80$.

În exemplul considerat, variabila x aparține mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$ care se numește *domeniul de definiție al funcției t*. Mulțimea $\{70, 80, 90, 100\}$ reprezintă *mulțimea în care funcția t ia valori sau codomeniul funcției*.

Legea de corespondență a fost, așadar, exprimată cu ajutorul unui tabel de valori.

✓ Funcții definite pe mulțimi finite exprimate cu ajutorul unor diagrame

Figura 2 reprezintă un raft dintr-un magazin, pe care sunt expuse câteva produse și sunt afișate prețurile corespunzătoare.

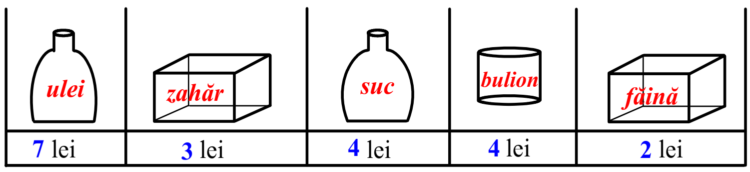


Figura 2

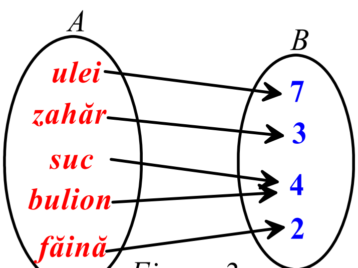


Figura 3

Oricărui produs de pe raft îi corespunde un singur preț. Reprezentăm corespondența cu ajutorul diagramei din *Figura* 3.

Notăm $p: A \to B$ funcția p (preț) definită pe mulțimea A (a produselor expuse pe raft) cu valori în mulțimea B (a prețurilor produselor).

Notația $p(x)$ exprimă faptul că variabilei x din mulțimea A îi corespunde valoarea $p(x)$ (prețul produsului x) din mulțimea B. *De exemplu*, $p(\text{zahăr}) = 3$.

Pentru funcția p, corespondența a fost exprimată cu ajutorul unei diagrame.

Observație Nu trebuie înțeles că orice diagramă reprezintă o funcție.

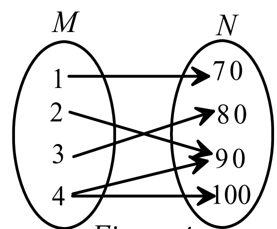


Figura 4

Astfel, diagrama din *Figura* 4 nu definește o funcție de la mulțimea M la mulțimea N, pentru că elementului 4 din M îi corespund două elemente, 90 și 100 din mulțimea N.

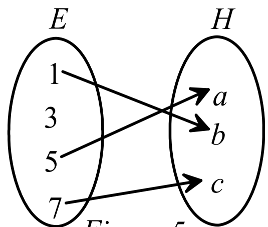


Figura 5

Diagrama din *Figura* 5 nu definește o funcție de la mulțimea E la mulțimea H, pentru că elementului 3 din E nu-i corespunde niciun element din mulțimea H.

✓ Funcții definite pe mulțimi finite exprimate cu ajutorul unei formule

Un test constă din 6 întrebări: pentru fiecare întrebare la care se răspunde corect se acordă 1,5 puncte. La punctajul obținut astfel, se adaugă 1 punct din oficiu. Punctajul total depinde de numărul x al întrebărilor la care se răspunde corect. Pentru fiecare $x \in \{0, 1, 2, ..., 6\}$, notăm punctajul corespunzător cu $f(x)$.

Relația $f(x) = 1,5 \cdot x + 1$ definește o funcție de la mulțimea $\{0, 1, 2, ..., 6\}$ la mulțimea $[0; \infty)$.

Corespondența a fost exprimată printr-o formulă.

✓ Funcții egale

Definiție

Fie $f : A \to B$ și $g : C \to D$, două funcții. Spunem că funcțiile sunt egale dacă au același domeniu de definiție, același codomeniu și același procedeu de corespondență.

Reține!

$f = g$ dacă și numai dacă $A = C$, $B = D$ și $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in A$

Exemplu Considerăm funcțiile $f : A \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$ și $g : B \to \mathbf{R}$, $g(x) = x^2$ unde $A = [-\sqrt{2}, \sqrt{3}] \cap \mathbf{Z}$ și $B = \{x \in \mathbf{Z} \mid |x| < 2\}$. Avem $A = B = \{-1, 0, 1\}$ și $f(-1) = |-1| = 1$, $g(-1) = (-1)^2 = 1$, deci $f(-1) = g(-1)$. Analog, avem $f(0) = g(0) = 0$ și $f(1) = g(1) = 1$. Deci cele două funcții sunt egale.

✓ Mulțimea valorilor unei funcții

Fie funcția $t : \{1, 2, 3, 4\} \to \{70, 80, 90, 100\}$, având tabelul de valori.

x	1	2	3	4
$t(x)$	80	70	90	80

Mulțimea $\{1, 2, 3, 4\}$ reprezintă domeniul de definiție, iar mulțimea $\{70, 80, 90, 100\}$ reprezintă mulțimea în care funcția ia valori sau codomeniul. Observăm că funcția t nu ia toate valorile din codomeniu, ci numai valorile 70, 80, 90. Spunem că mulțimea valorilor funcției este $\{70, 80, 90\}$.

Pentru funcția $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{0, 1, 2, 3\}$ a cărei diagramă este în *Figura* 6 domeniul de definiție este $\{1, 2, 3, 4\}$, codomeniul este $\{0, 1, 2, 3\}$, iar mulțimea valorilor este $\{0, 3\}$.

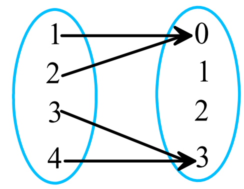


Figura 6

Pentru funcția $g : \{0, 1, 2\} \to \{0, 3, 6\}$ definită prin relația $g(x) = 3x$, mulțimea valorilor coincide cu codomeniul.

Definiție

Pentru funcția $f : A \to B$, se numește *mulțimea valorilor* funcției mulțimea notată $f(A)$, definită prin relația $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$.

Observații

1. Mulțimea valorilor funcției este inclusă în codomeniu, putând să fie egală cu codomeniul sau inclusă strict în acesta.

2. Mulțimea valorilor funcției f este numită și *imaginea* funcției f și se poate nota cu $\mathrm{Im}\, f$.

3. În cazul funcțiilor definite pe mulțimi finite, mulțimea valorilor se citește cu ușurință din tabelul de valori sau din diagramă.

Probleme rezolvate

1 a) Scrieți toate funcțiile definite pe mulțimea $\{a, b\}$ cu valori în mulțimea $\{1, 2, 3\}$. Câte funcții există de la mulțimea $\{a, b\}$ la mulțimea $\{1, 2, 3\}$?

b) Pentru fiecare funcție determinată scrieți imaginea ei.

Soluție a) În mod evident elementul $f(a)$ se poate alege în 3 moduri. Pentru fiecare valoare a lui $f(a)$, se poate alege $f(b)$ în trei moduri. Deci există 9 funcții definite pe $\{a, b\}$ cu valori în $\{1, 2, 3\}$, și anume funcțiile descrise cu ajutorul următoarelor diagrame.

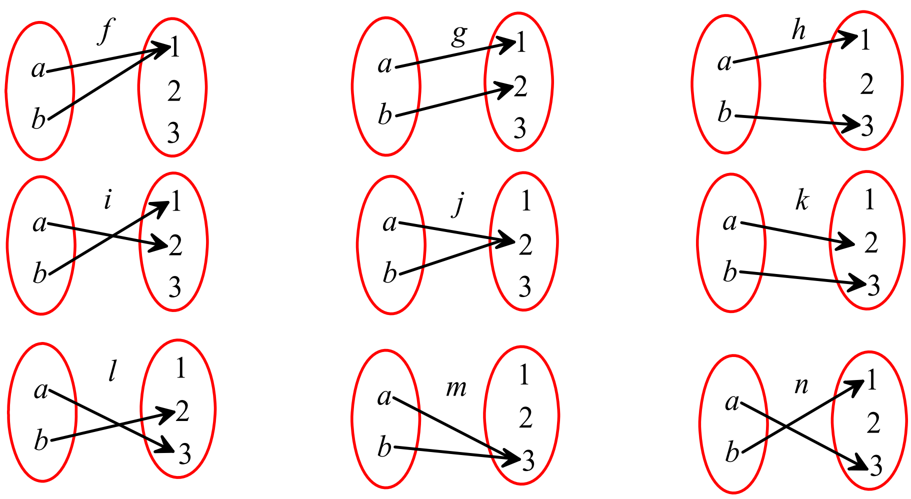


Figura 7

b) $\mathrm{Im}\, f = \{1\}$; $\mathrm{Im}\, g = \{1, 2\}$; $\mathrm{Im}\, h = \{1, 3\}$; $\mathrm{Im}\, i = \{1, 2\}$; $\mathrm{Im}\, j = \{2\}$; $\mathrm{Im}\, k = \{2, 3\}$; $\mathrm{Im}\, l = \{2, 3\}$; $\mathrm{Im}\, m = \{3\}$; $\mathrm{Im}\, n = \{1, 3\}$.

Comentariu

Cu un raționament asemănător celui din problema precedentă, se poate demonstra un rezultat util:

> Dacă mulțimea A are m elemente, iar mulțimea B are n elemente, atunci numărul tuturor funcțiilor definite pe A cu valori în B este n^m.

2 Dacă luăm la întâmplare o funcție $f:\{a, b, c\} \to \{1, 2, 3\}$, care este probabilitatea ca aceasta să aibă proprietatea $f(a)f(b)f(c) = 9$?

Soluție Numărul cazurilor posibile este egal cu numărul tuturor funcțiilor definite pe $\{a, b, c\}$ cu valori în $\{1, 2, 3\}$, adică $3^3 = 27$.

Cum $f(a), f(b)$ și $f(c)$ sunt din mulțimea $\{1, 2, 3\}$, produsul lor este 9 când două dintre aceste numere sunt egale cu 3 și unul este egal cu 1.

Deci există trei cazuri favorabile, și anume funcțiile ale căror tabele de valori sunt:

a	*b*	*c*
1	3	3

a	*b*	*c*
3	1	3

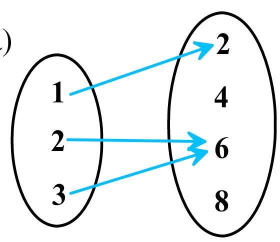
a	*b*	*c*
3	3	1

Probabilitatea cerută este $\frac{3}{27} = \frac{1}{9}$.

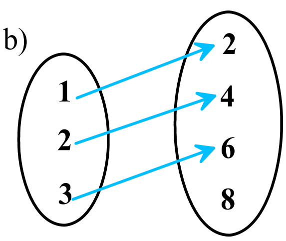
PROBLEME

1 Fie mulțimile $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Care dintre diagramele de mai jos definesc funcții de la mulțimea A la mulțimea B? *Justificați răspunsurile*!

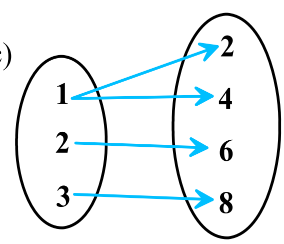
a)



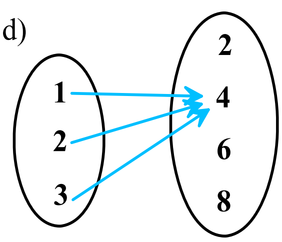
b)



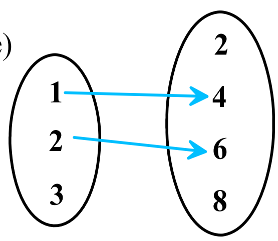
c)



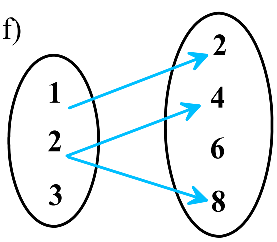
d)



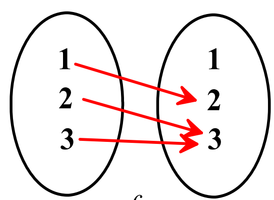
e)



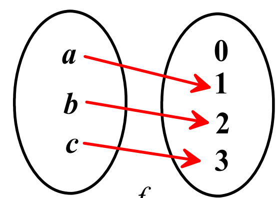
f)



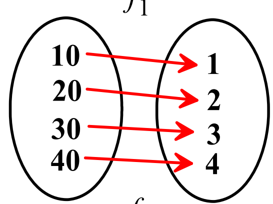
2 Pentru fiecare dintre funcțiile date prin diagramele de mai jos, precizați domeniul de definiție, codomeniul, imaginea funcției și apoi alcătuiți tabelul de valori.



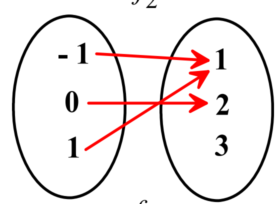
f_1



f_2



f_3



f_4

3 Dați exemplu:

a) de funcție $f:\{0,1,2,3\} \to \mathbf{Z}$ cu proprietatea că $\operatorname{Im} f = \{2, 5\}$;

b) de funcție $f:\{0,1,2,3\} \to \mathbf{Z}$ cu proprietatea că $\operatorname{Im} f$ are un singur element.

4 Fie funcția $g: \{4, 6, 8, 10\} \to \{1, 2, 3, 4\}$, definită prin relația $g(x) = \frac{x}{2} - 1$. Descrieți corespondența cu ajutorul unei diagrame și cu ajutorul unui tabel de valori.

5 a) Construiți toate funcțiile definite pe mulțimea $\{1, 2\}$ cu valori în mulțimea $\{3, 4\}$. Exprimați fiecare funcție prin câte o diagramă.
b) Dacă luăm la întâmplare o funcție $f: \{1, 2\} \to \{3, 4\}$, care este probabilitatea de a avea $f(1) + f(2) = 7$?

6 Construiți o funcție al cărei domeniu de definiție este mulțimea obiectelor pe care le studiați în clasa a VIII-a, fiecărui obiect corespunzându-i numărul de ore afectate săptămânal conform orarului. Exprimați corespondența cu ajutorul unui tabel.

7 Într-o cutie sunt x bile albe și $10 - x$ bile negre. Pentru fiecare $x \in \{1, 2, 3, ..., 9\}$ notăm cu $p(x)$, probabilitatea ca la o extragere a unei bile din cutie să obținem o bilă neagră.
a) Descrieți funcția $p: \{1, 2, 3, ..., 9\} \to \mathbf{R}$, printr-o formulă matematică.
b) Realizați un tabel de valori al funcției.
c) Precizați valoarea lui x pentru care $p(x) = 0,6$.
d) Aflați valoarea maximă și valoarea minimă a funcției.

8 Un concurs constă în 10 întrebări. Pentru fiecare răspuns corect se acordă 5 puncte, iar pentru fiecare răspuns greșit se scad 3 puncte. Fie funcția $f: \{0, 1, 2, 3, ..., 10\} \to \mathbf{Z}$, unde $f(n)$ reprezintă punctajul care se realizează dacă se dau n răspunsuri corecte (și $10 - n$ răspunsuri greșite).
a) Realizați tabelul de valori al funcției.
b) Precizați valoarea minimă și valoarea maximă a funcției.
c) Stabiliți formula de calcul a lui $f(n)$.

9 Dacă luăm la întâmplare o funcție definită pe $\{1, 2, 3\}$ cu valori în $\{4, 5, 6\}$, care este probabilitatea ca $f(1) > f(2) > f(3)$?

10 Fie funcțiile $f: \{-1, 0, 1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^{2020}$ și $g: \{-1, 0, 1\} \to \mathbf{R}, g(x) = x^2$. Demonstrați că $f = g$.

11 Se consideră funcțiile $f: \{1, a\} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2$ și $g: \{0, b\} \to \mathbf{R}, g(x) = cx$. Aflați numerele reale a, b, c astfel încât $f = g$.

12 Se numește diagonală a unui poligon convex un segment care unește două vârfuri nealăturate ale poligonului. Fie funcția $d: \{4, 5, 6, 7, 8\} \to \mathbf{N}^*$, unde $d(n)$ este numărul diagonalelor unui poligon cu n laturi. Stabiliți formula de calcul a lui $d(n)$ și realizați tabelul de valori al funcției.

13 Fie funcțiile f, g, h date prin tabelele de mai jos. Desenați diagramele corespunzătoare și apoi precizați formula legii de corespondență.

a)

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	4	1	0	1	4	9

b)

x	-2	-1	2	3
$g(x)$	2	1	2	3

c)

x	-2	0	1	2	3
$h(x)$	-4	0	2	4	6

14 Reprezentați printr-o diagramă și apoi printr-un tabel următoarele funcții:
a) $f: \{-1, 2, 4\} \to \{-2, 4, 8\}$;
$$f(x) = \begin{cases} -2, \text{ dacă } x = -1 \\ 2x, \text{ dacă } x \in \{2, 4\} \end{cases};$$
b) $g: \{-1, 0, 1, 3\} \to \{-2, 1, 2\}$;
$$g(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ dacă } x \in \{0, 1\} \\ 1 - x, \text{ dacă } x \in \{-1, 3\} \end{cases};$$
c) $h: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \{-1, 0\}$;
$$h(x) = \begin{cases} |x| - 1, \text{ dacă } x \in \{-1, 0, 1\} \\ 1 - |x|, \text{ dacă } x \in \{-2, 2\} \end{cases}.$$

15 Fie funcția $f: \{-2; -1; 1; 3\} \to \mathbf{R}, f(x) = -x + 1$.
a) Determinați valorile funcției.
b) Întocmiți tabelul de valori și diagrama funcției.

16 Fie funcția $f: \{2; 3; 4\} \to \mathbf{R}$, unde $f(x)$ reprezintă perimetrul unui triunghi echilateral de latură x.
a) Determinați mulțimea valorilor funcției.
b) Întocmiți tabelul de valori al funcției.

17 Pentru fiecare dintre funcțiile de mai jos stabiliți codomeniul B, cu număr minim de elemente:
a) $f: \{-1; 0; 1; 2; 3\} \to B, f(x) = x + 1$;
b) $f: \{-2; -1; 0; 1; 2\} \to B, f(x) = |x| + 1$.

Lecția 2. Graficul unei funcții, reprezentarea geometrică a graficului unor funcții numerice

Cosiderăm mulțimea M, formată din 4 copii: Ana, Bogdan, Carmen și Daniel. Vârstele copiilor (în ani) sunt precizate în tabelul de mai jos:

Ana	Bogdan	Carmen	Daniel
7	13	10	11

Construim funcția $v: M \to \mathbf{N}$, care face ca fiecărui copil din mulțimea M să-i corespundă vârsta sa. Astfel, avem $v(Ana) = 7$, $v(Bogdan) = 13$ etc.

Putem alcătui perechile ordonate: $(Ana, 7)$, $(Bogdan, 13)$, $(Carmen, 10)$, $(Daniel, 11)$. Mulțimea acestor perechi o numim *graficul* funcției v.

Definiție

Se numește *graficul* funcției $f: A \to B$ mulțimea notată G_f, definită prin relația

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}.$$

Reține!

$$(x, y) \in G_f \text{ dacă și numai dacă } y = f(x)$$

Exemplu Graficul funcției v din exemplul anterior este format din patru perechi, și anume:

$$G_v = \{(Ana, 7), (Bogdan, 13), (Carmen, 10), (Daniel, 11)\}.$$

- Graficul unei funcții $f: A \to B$ este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$.
- Numărul elementelor graficului este egal cu numărul elementelor domeniului de definiție al funcției.

Definiție

Dacă $A \subset \mathbf{R}$ și $B \subset \mathbf{R}$, atunci funcțiile $f: A \to B$ se numesc funcții *numerice*.

Observații

1. Funcția v din exemplul anterior nu reprezintă o funcție numerică, deoarece domeniul de definiție nu este o submulțime a lui $\mathbf{R}$.

2. Funcția $f: \{0, 1, 2, 3, 4\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$, reprezintă o funcție numerică.

✓ Reprezentarea geometrică a graficului unei funcții numerice

Dacă $f: A \to B$ este o funcție numerică atunci fiecare element $(x, f(x))$ al graficului este o pereche de numere reale. Prin urmare, alegând un sistem de coordonate în plan, putem face ca fiecărei perechi $(x, f(x))$ să-i corespundă punctul de abscisă x și ordonată $f(x)$.

Reține!

Mulțimea tuturor punctelor din plan de coordonate $(x, f(x))$, cu $x \in A$, se numește *reprezentarea geometrică a graficului* funcției numerice f.

Exemplu Pentru funcția $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = |x|$, avem tabelul de valori

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	2	1	0	1	2

Graficul este $G_f = \{(-2,2), (-1,1), (0,0), (1,1), (2,2)\}$.
Reprezentarea geometrică a graficului este alcătuită din 5 puncte, și anume: $A(-2,2)$, $B(-1,1)$, $O(0,0)$, $C(1,1)$ și $D(2,2)$. (Vezi *Figura* 8.)

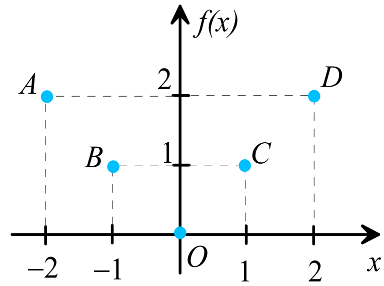


Figura 8

Câteva precizări legate de limbaj

- A reprezenta grafic o funcție $f: A \to B$ (unde $A \subset \mathbf{R}$ și $B \subset \mathbf{R}$) înseamnă a desena într-un sistem de axe ortogonale reprezentarea geometrică a graficului.
- Noțiunea de grafic este diferită de aceea de reprezentare geometrică a graficului. Graficul este o *mulțime de perechi* din $A \times B$, în timp ce reprezentarea geometrică a graficului este o *mulțime de puncte* din plan.
- Pentru simplitate, uneori spunem *grafic* în loc de *reprezentarea geometrică a graficului*. Astfel, în loc să spunem că punctul $A(-1, 1)$ aparține reprezentării geometrice a graficului, spunem, mai simplu, că punctul aparține graficului.

Probleme rezolvate

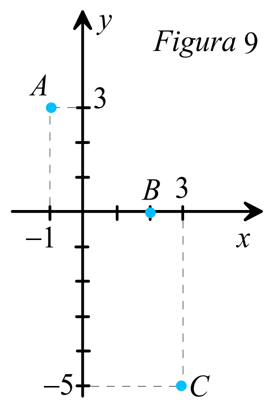
1 Reprezentați grafic funcția $f: \{-1, 2, 3\} \to \mathbf{Z}$ definită prin $f(x) = -x^2 + 4$.

Soluție $f(-1) = -(-1)^2 + 4 = 3$; $f(2) = -2^2 + 4 = 0$; $f(3) = -3^2 + 4 = -5$.

Tabelul de valori este:

x	-1	2	3
$f(x)$	3	0	-5

Graficul funcției este $G_f = \{(-1,3); (2,0); (3,-5)\}$.
Reprezentarea geometrică a graficului este mulțimea punctelor $A(-1, 3)$, $B(2, 0)$, $C(3, -5)$. (Vezi *Figura* 9.)

Figura 9


2 Graficul unei funcții f este $\{(2,2), (3, 7), (10, 2)\}$. Alcătuiți tabelul de valori, precizați domeniul de definiție și mulțimea valorilor funcției.

Soluție Avem $f(2) = 2$, $f(3) = 7$ și $f(10) = 2$, deci tabelul de valori este

x	2	3	10
$f(x)$	2	7	2

Domeniul de definiție este $\{2, 3, 10\}$, iar mulțimea valorilor este $\{2, 7\}$.

PROBLEME

1 Fie funcția $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbf{Q}$, definită $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$. Stabiliți care dintre punctele:
$A(-2; 2)$; $B(2; 0,5)$; $C(0; 0,(6))$; $D(1; 0,4)$; $E\left(3; \dfrac{1}{3}\right)$ aparțin graficului funcției f.

2 Fie funcția $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x$. Alcătuiți tabelul de valori al funcției, determinați graficul funcției și reprezentați grafic funcția.

3 Fie funcția $f: A \to B$ al cărei grafic este $G_f = \{(1, 1); (-1, 1); (\sqrt{2}, 2); (-\sqrt{2}, 2)\}$. Găsiți domeniul de definiție și mulțimea valorilor.

4 Reprezentați grafic următoarele funcții:

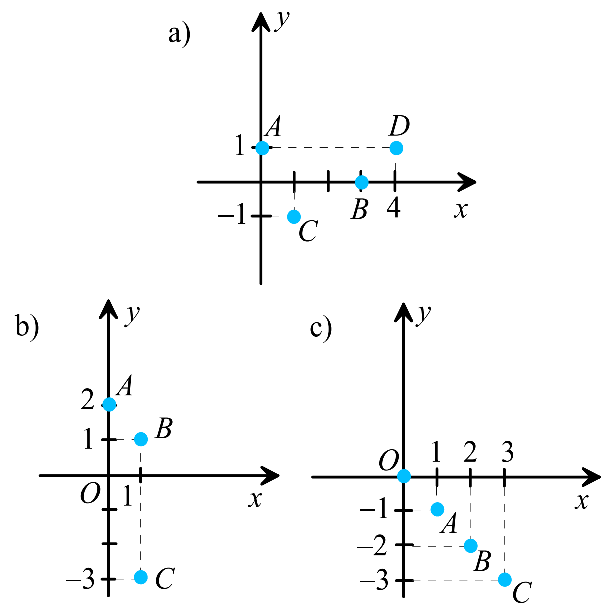
a) $f: \{-2, -1, 0, 1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 4$;
b) $g: \{-3, -2, -1, 0\} \to \mathbf{R}$, $g(x) = x + 4$;
c) $h: \{-4, -2, 0, 2, 4\} \to \mathbf{R}$, $h(x) = |x + 1|$;
d) $i: \{-3; -2,7; -\sqrt{3}; -\sqrt{2}; 2,3\} \to \mathbf{R}$, $i(x) = [x]$.

5 Se consideră funcția $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $f(x) = 2x + 1$. Stabiliți care dintre punctele următoare aparțin graficului funcției date:
$A(1, 3)$; $B(-2, 3)$; $C(-2, -3)$; $D(2, 5)$; $E(0, 1)$; $F\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$.

6 Se dă funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = -3x + 5$.
Determinați:
a) $a \in \mathbf{R}$ știind că $A(3, a)$ aparține graficului funcției;
b) $b \in \mathbf{R}$ știind că $B(b, 2)$ aparține graficului funcției;
c) $c \in \mathbf{R}$ știind că $C(c, c)$ aparține graficului funcției;
d) punctul de pe graficul funcției f care are abscisa egală cu dublul ordonatei;
e) punctul de pe graficul funcției f care are coordonatele opuse.

7 Reprezentați grafic funcția
$g: \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \to \mathbf{N}$, definită prin $g(n) = (-1)^n$.

8 Stabiliți care dintre desenele următoare pot fi reprezentări grafice de funcții.
Justificați răspunsul!



9 În *Figura* 10 este reprezentat graficul funcției $f: \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \to \mathbf{N}$, unde $f(x)$ reprezintă numărul elevilor unei clase care au obținut nota x la o anumită lucrare.

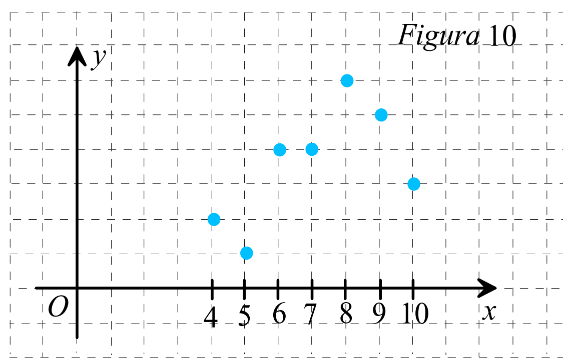


Figura 10

Precizați:
a) numărul elevilor din clasă;
b) numărul elevilor care au obținut note mai mari sau egale cu 8;
c) nota cu cea mai mare frecvență;
d) nota cu cea mai mică frecvență;
e) media clasei la lucrarea considerată.

Lecția 3. Funcții de forma $f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$, unde a și b sunt numere reale și D este o mulțime finită de numere reale sau $D = \mathbb{R}$

✓ Funcții $f: D \to \mathbb{R}, f(x) = ax$, unde $a \in \mathbb{R}^*$

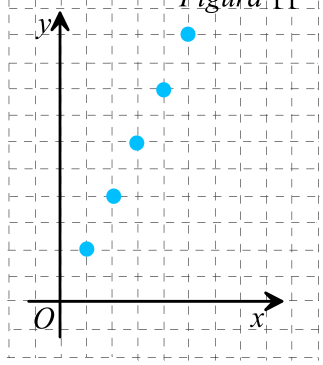


Figura 11

- Dacă D este o mulțime finită formată din n numere reale, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci graficul funcției f este format din n puncte distincte din plan.

Exemplu Dacă $g: \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbb{R}, g(x) = 2x$, graficul său este alcătuit din 5 puncte (vezi *Figura* 11).

- Dacă $D = \mathbb{R}$, atunci graficul funcției este format dintr-o infinitate de puncte. Studiem în continuare aceste funcții.

Exemplu Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Funcția f are același procedeu de corespondență ca și funcția g din exercițiul de mai sus, dar cele două funcții au domenii de definiție diferite, deci graficele sunt diferite. Toate punctele graficului funcției g aparțin și graficului lui f. Dar, întrucât domeniul de definiție al funcției f este o mulțime infinită, reprezentarea grafică a lui f conține o infinitate de puncte. *Figura* 11 sugerează coliniaritatea punctelor graficului. Vom demonstra că graficul funcției f este dreapta OA unde $A(1, 2)$.

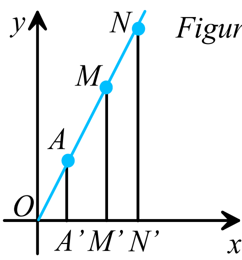


Figura 12

Fie $M(t, 2t)$ cu $t \neq 0$ un punct arbitrar al graficului, diferit de O. Notăm cu M' proiecția lui M pe Ox (vezi *Figura* 12). În triunghiurile dreptunghice OAA' și OMM' avem $\frac{OA'}{OM'} = \frac{1}{t}$ și $\frac{AA'}{MM'} = \frac{2}{2t} = \frac{1}{t}$, deci $\frac{OA'}{OM'} = \frac{AA'}{MM'}$.

Rezultă că triunghiurile sunt asemenea. De aici deducem că $\sphericalangle AOA' \equiv \sphericalangle MOM'$, deci O, A, M sunt coliniare.

Am arătat astfel că orice punct al graficului se află pe dreapta OA.

Reciproc, fie un punct $N(n, p)$ al dreptei OA și N' proiecția lui N pe Ox. Din teorema fundamentală a asemănării, rezultă că triunghiurile OAA' și ONN' sunt asemenea, prin urmare $\frac{OA'}{ON'} = \frac{AA'}{NN'}$, adică $\frac{1}{n} = \frac{2}{p}$, de unde $p = 2n = f(n)$, ceea ce dovedește că N aparține graficului.

Am arătat astfel (prin dublă incluziune) că reprezentarea geometrică a graficului este o dreaptă.

Cu un raționament analog se demonstrează următoarea proprietate:

Reține!

Graficul unei funcții $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax$ este o dreaptă care trece prin origine.

Prin urmare, pentru a trasa graficul unei funcții de această formă, este suficient să reprezentăm un punct al graficului cu abscisa nenulă și să construim dreapta determinată de acest punct și de originea sistemului de axe.

Observații **1.** Dacă f este o funcție definită printr-o relație de forma $f(x) = ax$, atunci fiecare imagine $f(x)$ este direct proporțională cu x. *Reciproc*, o dependență direct proporțională se exprimă printr-o funcție de forma $f(x) = ax$.

2. Pentru cazurile particulare $a = 1$ și $a = -1$ obținem funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$ și $g(x) = -x$. Graficul funcției f este dreapta OA unde $A(1, 1)$, iar graficul funcției g este o dreapta OB, unde $B(-1, 1)$ (vezi *Figura* 13). Dreapta OA este numită *prima bisectoare*, iar dreapta OB, *a doua bisectoare*. Denumirile sunt motivate de relațiile $\sphericalangle xOA \equiv \sphericalangle yOA$ și $\sphericalangle x'OB \equiv \sphericalangle yOB$.

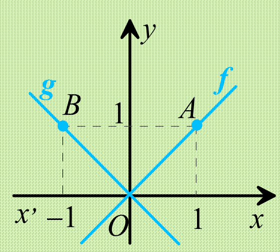


Figura 13

3. Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax, a \in \mathbb{R}^*$ se mai numește și funcție liniară (deoarece graficul său este o dreaptă).

Exemplu Funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = -\frac{1}{2}x$, este liniară și graficul său conține originea. Calculăm $f(2) = -1$; rezultă că $A(2, -1)$ aparține graficului. Dreapta OA constituie reprezentarea graficului funcției date. (Vezi *Figura* 14.)

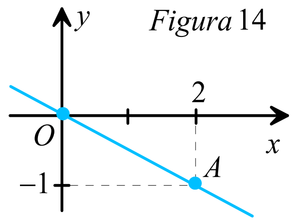


Figura 14

✓ Funcții $f: D \to \mathbf{R}$, $f(x) = b$, unde $b \in \mathbf{R}$

Definiție

O funcție $f: D \to \mathbf{R}$, $f(x) = b$, unde $D \subset \mathbf{R}$ și $b \in \mathbf{R}$, se numește *funcție constantă.*

- Dacă D este o mulțime finită formată din n numere reale $n \in \mathbf{N}^*$, atunci graficul funcției f este format din n puncte situate la aceeași distanță față de Ox.

Astfel, dacă $g: \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbf{R}$, $g(x) = 4$, atunci graficul lui g este alcătuit din 5 puncte. (Vezi *Figura* 15.)

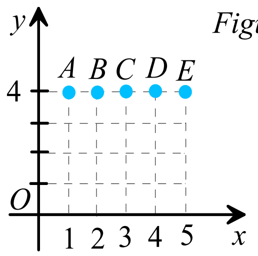


Figura 15

Din reprezentarea geometrică observăm că punctele A, B, C, D și E au aceeași ordonată egală cu 4 și deci punctele se găsesc la aceeași distanță față de axa Ox.

- Dacă $D = \mathbf{R}$, atunci graficul funcției f este format dintr-o infinitate de puncte situate la aceeași distanță $d = |b|$ față de Ox. Aceasta deoarece punctele graficului au aceeași ordonată b. În cazul particular $b = 0$, graficul coincide cu axa Ox.

Reține!

Graficul unei funcții $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = b$, este o dreaptă orizontală (paralelă cu axa Ox).

Exemplu

În *Figura* 16 este reprezentat graficul funcției constante $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2$.

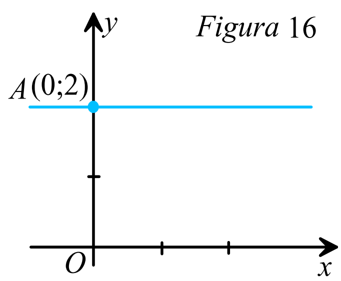


Figura 16

✓ Funcții $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definite prin relații de tipul $f(x) = ax + b$ unde $a, b \in \mathbf{R}^*$

Am studiat anterior cazuri particulare ale funcțiilor de acest tip: pentru $b = 0$, se obțin funcții liniare. Pentru $a = 0$, se obțin funcții constante.
Are loc următoarea proprietate:

Reține!

Graficul unei funcții $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$, este o dreaptă.

De exemplu, vom justifica faptul că graficul funcției $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = 2x + 3$, este o dreaptă, cu ajutorul funcției liniare $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x$. Am demonstrat anterior că graficul funcției f este o dreaptă ce trece prin origine. Deoarece $h(x) = f(x) + 3$, putem face ca fiecărui punct al graficului lui f să-i corespundă un punct al graficului lui h având aceeași abscisă, iar ordonata mai mare cu trei unități.

De exemplu, punctului $O(0,0)$ de pe graficul lui f îi corespunde punctul $E(0,3)$ pe graficul lui h; punctului $A(1,2)$ de pe graficul lui f îi corespunde punctul $F(1,5)$ pe graficul lui h. Astfel, graficul lui h se obține *translatând* graficul lui f pe direcția axei Oy cu 3 unități în sens pozitiv. (Vezi *Figura* 17, latura fiecărui pătrățel reprezintă unitatea de măsură.)

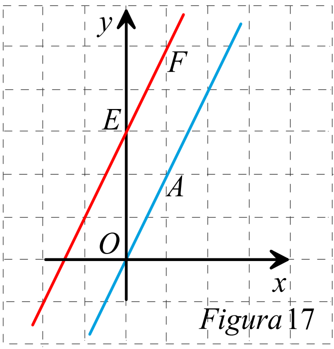


Figura 17

Pentru a trasa graficul unei funcții $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definite prin $f(x) = ax + b$, este suficient să reprezentăm două puncte arbitrare ale sale și să trasăm dreapta determinată de ele. În unele probleme este util ca aceste puncte de pe grafic să fie intersecțiile cu axele de coordonate ale reprezentării grafice.

Observație Deoarece graficul funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbf{R}^*$, este o dreaptă, funcția f se mai numește *funcție liniară*.

Reține!

- Axa Ox reprezintă mulțimea punctelor din plan care au ordonata egală cu zero.
  Punctul $(x, f(x))$ al graficului aparține axei Ox dacă și numai dacă $f(x) = 0$.
- Axa Oy reprezintă mulțimea punctelor din plan care au abscisa egală cu zero.
  Punctul $(x, f(x))$ al graficului aparține axei Oy dacă și numai dacă $x = 0$.

Exemplu Fie funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = -3x + 3$.

Pentru a determina intersecția graficului cu axa Ox, aflăm valoarea lui x pentru care $f(x) = 0$. Avem $-3x + 3 = 0$, de unde $x = 1$. Punctul căutat este $A(1, 0)$.

Pentru a determina intersecția graficului cu axa Oy, dăm lui x valoarea 0 și avem $f(0) = 3$. Punctul căutat este $B(0, 3)$. Graficul funcției este dreapta AB (vezi *Figura* 18).

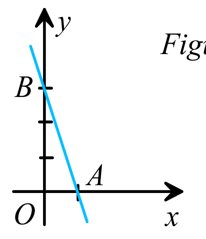


Figura 18

✓ Funcții $f: D \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$ unde D este o mulțime finită de numere reale

Dacă A este o mulțime finită cu n elemente, $A \subset \mathbf{R}$, graficul funcției $f: A \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$, este alcătuit din n puncte ale căror abscise sunt elementele mulțimii A. Cum graficul funcției f este inclus în graficul funcției $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = ax + b$, rezultă că punctele ce alcătuiesc graficul lui f sunt coliniare.

De exemplu, graficul funcției $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x + 1$, este alcătuit din 5 puncte coliniare, având coordonatele $(-2, -3)$, $(-1, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$ și $(2, 5)$ (vezi *Figura* 19).

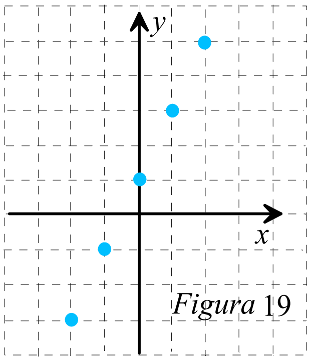


Figura 19

Probleme rezolvate

1 Reprezentați grafic funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 2x - 4.$

Soluție Întocmim tabelul

x	1	3
$f(x)$	-2	2

și obținem punctele $A(1;\ -2)$ și $B(3;\ 2)$.

Reprezentarea graficului este dreapta AB din *Figura* 20.

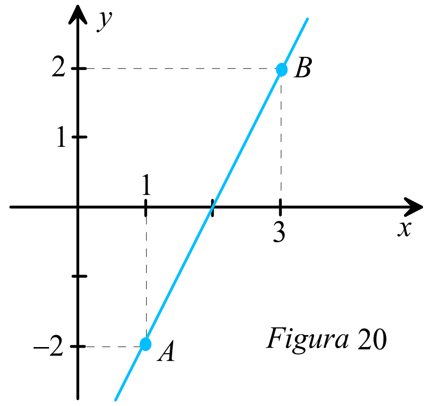


Figura 20

2 a) Reprezentați grafic funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = -2x + 4.$

b) Calculați aria triunghiului determinat de reprezentarea graficului funcției date cu axele de coordonate ale sistemului cartezian.

Soluție a) Fiind util în rezolvarea punctului b), pentru trasarea graficului funcției vom determina intersecțiile graficului funcției cu axele.

Intersecția cu Oy este punctul $A(0, f(0))$, adică $A(0, 4)$, iar intersecția cu Ox este punctul $B(x,\ 0)$ unde $-2x + 4 = 0$, deci $B(2,\ 0)$. Dreapta AB este reprezentarea grafică a funcției f.

b) $\mathcal{A}_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$ (unități de arie).

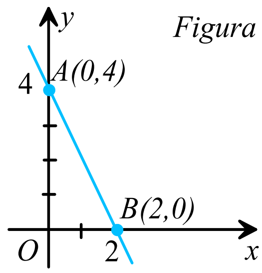


Figura 21

PROBLEME

1 Care dintre următoarele funcții au reprezentarea grafică o dreaptă? În caz afirmativ reprezentați graficul.

a) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = -2x$; b) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = -2$;
c) $f: \{-1, 0, 1, 2\} \to \mathbf{R}, f(x) = -x + 2$;
d) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 2x + 3$;
e) $f: \{5, 8, 9\} \to \mathbf{R}, f(x) = 5 - x.$

2 Reprezentați grafic următoarele funcții:

a) $f: \{-1, 0, 1, 2\} \to \mathbf{R}, f(x) = -2x + 3$;
b) $f: \{-2, 2, 4\} \to \mathbf{R}, f(x) = 2x - 3$;
c) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = -3x$; d) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 2,5.$

3 Determinați coordonatele punctelor de intersecție ale graficului lui f cu axele Ox și Oy și apoi reprezentați grafic.

a) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = -x + 5$;
b) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{1}{2}x - 1.$

4 Care dintre graficele următoarelor funcții trec prin origine?

a) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 2x - 3$;
b) $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g(x) = 2\sqrt{2}\,x$;
c) $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, h(x) = 2\sqrt{2}$.

5 Determinați funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = ax + b$, știind că reprezentarea grafică este dreapta AB unde $A(0,\ -5)$ și $B(1,\ -3)$.

6 Fie funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = m^2x + m^2 - m,\ m \in \mathbf{R}.$ Determinați m știind că:

a) graficul lui f trece prin origine;
b) graficul lui f coincide cu Ox;
c) graficul lui f formează un unghi de $45°$ cu Ox.

7 Reprezentați grafic următoarele funcții:

a) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 3x$;
b) $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g(x) = -3x + 6$;
c) $h: \{-1, 0, 1, 2\} \to \mathbf{R}, h(x) = -3,5.$

8 Determinați coordonatele punctelor de intersecție ale graficului funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = -6x + 4$ cu axele de coordonate și apoi reprezentați grafic această funcție.

9 Reprezentați în același sistem de axe de coordonate graficele funcțiilor: $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = -x$; $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g(x) = -x - 1$; $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, h(x) = -x + 1.$
Ce observați?

Lecția 4. Funcții de tipul $f: D \to \mathbf{R}, f(x) = ax + b$, unde D este un interval nedegenerat

Cu ajutorul următoarei probleme ne propunem să arătăm că graficul unei funcții liniare cu domeniul de definiție un interval nedegenerat este fie o semidreaptă, fie un segment de dreaptă.

Problemă rezolvată

Reprezentați grafic funcțiile:

$f: [-1, 2] \to \mathbf{R}, f(x) = x - 3$; $\quad h: (-1, 2) \to \mathbf{R}, h(x) = x - 3$;

$k: (-\infty, 2] \to \mathbf{R}, k(x) = x - 3$; $\quad u: [-1, \infty) \to \mathbf{R}, u(x) = x - 3$.

Soluție Considerăm funcția $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = x - 3$. Graficul ei este dreapta d care intersectează axa Ox în punctul de abscisă 3 și axa Oy în punctul de ordonată -3.

Cum domeniul de definiție al funcției f este inclus în cel al funcției g și $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in [-1, 2]$, graficul funcției f este inclus în graficul lui g. Graficul lui f conține acele puncte din graficul lui g care au abscisa x în intervalul $[-1, 2]$. Paralelele duse prin punctele $(-1, 0)$ și $(2, 0)$ la axa Oy intersectează dreapta d în punctele $A(-1,\ -4)$ și $B(2,\ -1)$. Reprezentarea grafică a funcției f este segmentul AB; (vezi *Figura* 22).

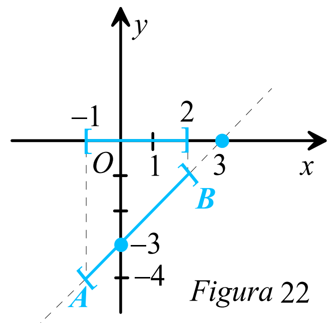


Figura 22

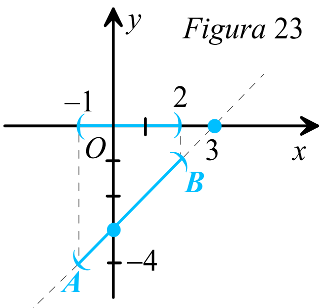


Figura 23

Analog, graficele funcțiilor h, k și u sunt incluse în graficul lui g. Graficul lui h este segmentul deschis (AB); (vezi *Figura* 23).

Graficele funcțiilor k și u reprezentate în *Figurile* 24 și 25 sunt semidreptele $[BA$ și $[AB$.

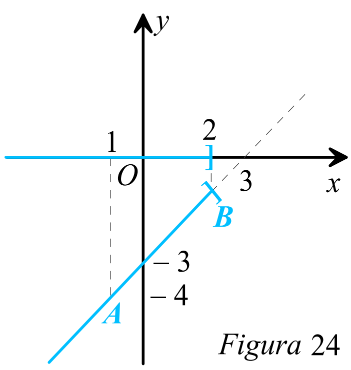


Figura 24

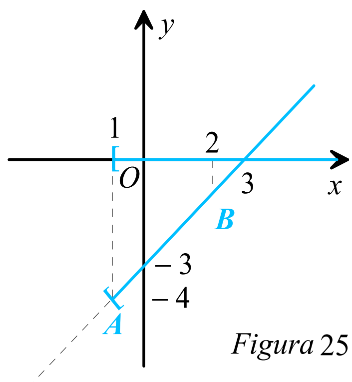


Figura 25

Algoritm pentru reprezentarea graficului funcției liniare $f: D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}$ interval nedegenerat.

Pentru a reprezenta graficul funcției $f: D \to \mathbf{R}$ definite prin relația $f(x) = ax + b$ unde A este un interval, procedăm astfel:

- reprezentăm graficul funcției $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = ax + b$, care este o dreaptă;
- reprezentăm pe axa Ox punctele intervalului A, obținând un segment sau o semidreaptă;
- păstrăm din graficul lui g punctele ale căror proiecții pe axa Ox aparțin intervalului A.

PROBLEME

1 Se dă funcția $f: [-2; 5) \to \mathbf{R}, f(x) = x - 1$. Care dintre punctele $A(-2; 3), B(0; -1), C(5; 4)$ aparțin graficului funcției?

2 Reprezentați grafic funcțiile:
a) $f: [-1; 3] \to \mathbf{R}, f(x) = x - 3$;
b) $f: (-2; 2) \to \mathbf{R}, f(x) = 3x - 3$;
c) $f: [-3; 3) \to \mathbf{R}, f(x) = 3$;
d) $f: (-\infty; 2) \to \mathbf{R}, f(x) = x - 2$;
e) $f: [-2; \infty) \to \mathbf{R}, f(x) = 2x$.

3 Fie funcția $f: [-1; 3] \to \mathbf{R}, f(x) = -x + 5$. Care este cea mai mică valoare a funcției f? Dar cea mai mare valoare?

4 Dacă $f: [-1, 5] \to \mathbf{R}, f(x) = x - 2$, determinați perimetrul și aria suprafeței determinate de graficul funcției f și axele de coordonate.

5 Fie $f: [-2, 0] \to \mathbf{R}, f(x) = x + 1$ și $g: [0, 3] \to \mathbf{R}$, $g(x) = -x + 1$.
a) Arătați că $f(0) = g(0)$.
b) Reprezentați în același sistem de axe funcțiile f și g.
c) Determinați perimetrul și aria suprafeței determinată de graficele celor două funcții și axa Ox.

6 Determinați funcția $f: [0, 1] \to \mathbf{R}$, cu proprietatea $f(1 - x) = x$, pentru orice $x \in [0, 1]$ și apoi reprezentați graficul său.

7 Fie funcțiile $f: [-1, 0] \to \mathbf{R}, f(x) = -x$ și $g: [0, 1] \to \mathbf{R}, g(x) = x$.
a) Reprezentați în același sistem de axe graficele celor două funcții.
b) Graficul funcției $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, h(x) = 1$, intersectează graficele funcțiilor f și g în A, respectiv B. Calculați aria și perimetrul triunghiului AOB.

8 Reprezentați grafic funcția $f: A \to \mathbf{R}, f(x) = -x + 1$, unde $A = \{x \in \mathbf{R} \mid |x - 1| < 2\}$.

9 Aflați $m \in \mathbf{R}$, astfel încât punctul $A(1, m - 1)$ să aparțină graficului funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = -2x + 1$.

10 Laturile unui triunghi au lungimile (exprimate în centimetri) egale cu 2, 5 și x.
a) Precizați intervalul I în care poate lua valori x.
b) Reprezentați grafic funcția $p: I \to \mathbf{R}$ unde cu $p(x)$ am notat perimetrul triunghiului.

11 Fie funcția $f: (-\infty, 2] \to \mathbf{R}, f(x) = 2x - 3$. Care este cea mai mare valoare a funcției f?

12 Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 2x + 1$. Aflați coordonatele punctelor de pe grafic care au:
a) abscisa egală cu ordonata;
b) abscisa egală cu jumătatea ordonatei;
c) ordonata egală cu o treime din abscisă;
d) abscisa egală cu dublul ordonatei;
e) modulul abscisei egal cu modulul ordonatei.

13 Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = -2x + 3$.
a) Aflați $x \in \mathbf{N}$, pentru care funcția ia valoarea -5.
b) Aflați $x \in \mathbf{Z}$, pentru care funcția ia valoarea -2.
c) Aflați $y \in \mathbf{R}$, știind că punctul $A(3, y)$ aparține graficului funcției.
d) Aflați $y \in \mathbf{Z}$, știind că punctul $B\left(-\frac{1}{2}, y\right)$ aparține graficului funcției.
e) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $f(x) = 4$.
f) Rezolvați în mulțimea numerelor naturale $f(x) \geq -7$.

14 Rezolvați aceleași cerințe ca la problema 13 pentru $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = -3x + 1$.

15 Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 1 - mx$.
a) Aflați $m \in \mathbf{R}$, astfel încât graficul funcției să intersecteze axa absciselor în punctul de abscisă 1.
b) Pentru $m = 1$, aflați punctele de intersecție a graficului cu axele de coordonate.
c) Reprezentați grafic funcția în cazul $m = -1$.
d) Aflați distanța de la originea sistemului de axe la dreapta ce reprezintă graficul funcției de la punctul d).
e) Aflați aria triunghiului determinat de axele de coordonate și graficul funcției de la punctul d).
f) Aflați măsura unghiului format de graficul funcției cu axa ordonatelor în cazul $m = -1$.

Lecția 5. Interpretarea geometrică Lecturi grafice

✓ Verificarea coliniarității unor puncte

Pentru a stabili coliniaritatea a trei sau a mai multor puncte procedăm astfel: determinăm funcția $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = ax + b$ al cărei grafic conține două dintre punctele date și apoi verificăm dacă și celelalte puncte aparțin graficului acesteia.

Exemplu Vom arăta că punctele $A(2, 3)$, $B(-1, 0)$ și $C(3, 4)$ sunt coliniare.

Pentru aceasta considerăm funcția $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = ax + b$. Determinăm a și b astfel încât $A(2, 3)$ și $B(-1, 0)$ să aparțină graficului funcției f.

Din $A(2, 3) \in G_f$ rezultă $f(2) = 2a + b = 3$; din $B(-1, 0) \in G_f$ rezultă $f(-1) = -a + b = 0$.

Din $-a + b = 0$ rezultă $b = a$ și înlocuind în $2a + b = 3$ obținem $3a = 3$, deci $a = 1$ și $b = 1$. Avem $f(x) = x + 1$.

Verificăm dacă $C(3, 4) \in G_f$. Deoarece $f(3) = 3 + 1 = 4$ rezultă că $C \in G_f$ și atunci A, B, C sunt coliniare.

✓ Intersecția reprezentărilor grafice a două funcții $f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}, f(x) = ax + b$ și $g\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}, g(x) = cx + d$ (unde $a, b, c, d \in \mathrm{R}$)

Definiție

Considerăm funcțiile $f, g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definite prin $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$ (unde $a, b, c, d \in \mathbf{R}$).
Punctul $M(x, y)$ este comun graficelor celor două funcții dacă și numai dacă $y = f(x)$ și $y = g(x)$.

Reține!

- Abscisa punctului de intersecție a graficelor funcțiilor f și g se obține rezolvând ecuația $f(x) = g(x)$.
- Dacă ecuația $f(x) = g(x)$ nu are soluții, atunci reprezentările grafice ale funcțiilor f și g sunt drepte paralele.

Exemplu Funcțiile $f, g, h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definite prin $f(x) = -x + 2$, $g(x) = x$ și $h(x) = x + 2$, au reprezentările grafice în *Figura* 26.

Pentru funcțiile definite mai sus avem următoarele situații:

✓ graficul lui f și graficul lui g se intersectează în punctul $A(1, 1)$, deoarece ecuația $f(x) = g(x)$ are soluția $x = 1$ și în plus $f(1) = g(1) = 1$.

✓ graficul lui f și graficul lui h se intersectează în punctul $B(0, 2)$, deoarece ecuația $f(x) = h(x)$ are soluția $x = 0$ și $f(0) = 2$.

✓ graficele funcțiilor g și h nu au puncte comune, deoarece ecuația $g(x) = h(x)$ nu are soluții. Reprezentările celor două funcții sunt drepte paralele (graficul lui h se poate obține translatând graficul lui g pe direcția axei Oy, în sens pozitiv cu două unități).

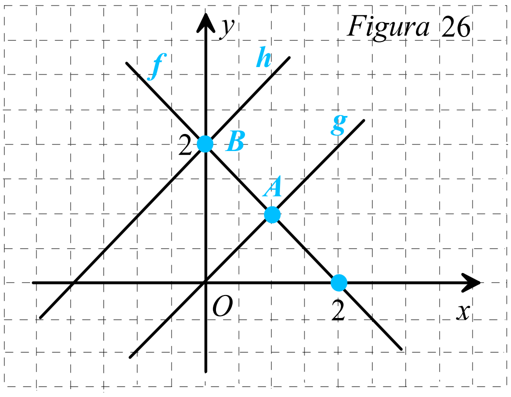


Figura 26

✓ Lecturi grafice

Dacă se cunoaște reprezentarea geometrică a graficului funcției $f: D \to \mathbf{R}, f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbf{R}$ și $D \subset \mathbf{R}$, atunci din lectura acestuia putem deduce domeniul D, imaginea funcției (mulțimea valorilor), precum și alte proprietăți ale funcției.

Probleme rezolvate

1. În *Figura* 27 este reprezentat graficul unei funcții $f: D \to \mathbf{R}$.

a) Aflați domeniul D de definiție al funcției.

b) Alcătuiți tabelul de valori al funcției.

c) Determinați imaginea funcției.

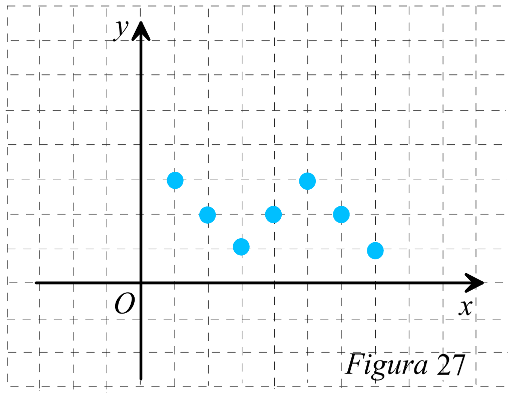


Figura 27

Soluție a) Din lectura graficului obținem $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

b) Tabelul de valori al funcției este:

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	3	2	1	2	3	2	1

c) Din tabelul de valori obținem că $\operatorname{Im} f = \{1, 2, 3\}$.

2. În *Figura* 28 este reprezentat graficul funcției $f: \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \to \mathbf{R}$ definită prin legea $f(x) =$ numărul elevilor din clasă care au obținut la teza de matematică nota x.

a) Câți elevi sunt în clasă?

b) Care notă a fost luată de cei mai mulți elevi? Dar de cei mai puțini elevi?

c) Câți elevi au luat note mai mici sau egale cu 6?

d) Câți elevi au luat note mai mari sau egale cu 8?

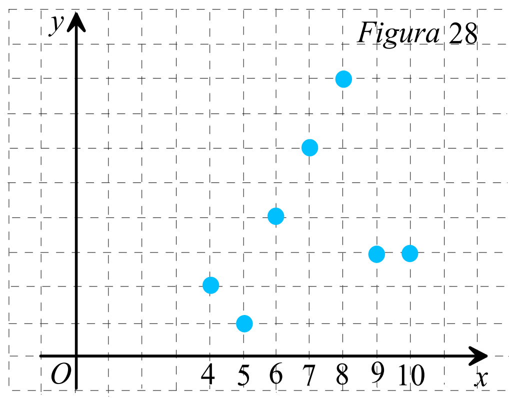


Figura 28

Soluție Alcătuim mai întâi tabelul de valori al funcției.

x	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	2	1	4	6	8	3	3

a) Din tabel deducem că numărul de elevi din clasă este egal cu $2 + 1 + 4 + 6 + 8 + 3 + 3 = 27$.

b) Cum $f(8) = 8$, deducem că nota 8 a fost luată de 8 elevi, ceea ce reprezintă nota luată de cei mai mulți elevi. Cum $f(5) = 1$, deducem că nota 5 a fost luată de un singur elev.

c) Din $f(4) = 2$, $f(5) = 1$ și $f(6) = 4$, obținem că un număr de $2 + 1 + 4 = 7$ elevi au luat note mai mici sau egale cu 6.

d) Din $f(8) = 8$, $f(9) = 3$ și $f(10) = 3$, avem că $8 + 3 + 3 = 14$ elevi au luat note mai mari sau egale cu 8.

3. Se consideră funcțiile $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x + 2$ și $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g(x) = 4x - 1$.

a) Aflați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor f și g.

b) Calculați aria suprafeței cuprinse între graficele celor două funcții și axa Ox.

c) Calculați aria suprafeței cuprinse între graficele celor două funcții și axa Oy.

Soluție

a) Rezolvăm ecuația $f(x) = g(x)$ echivalent cu $x + 2 = 4x - 1$, de unde $-3x = -3$, deci $x = 1$, $f(1) = g(1) = 3$. Punctul de intersecție a graficelor este $M(1, 3)$.

b) Graficul funcției f este dreapta AB unde $A(0, 2)$ și $B(-2, 0)$.

Graficul funcției g este dreapta CD unde $C(0, -1)$ și $D\left(\frac{1}{4}, 0\right)$.

$\mathcal{A}_{\Delta BDM} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot MM' = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} \cdot 3 = \frac{27}{8} = 3,375$ (unități de arie)

c) $\mathcal{A}_{\Delta AMC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot MM'' = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 = \frac{3}{2} = 1,5$ (unități de arie).

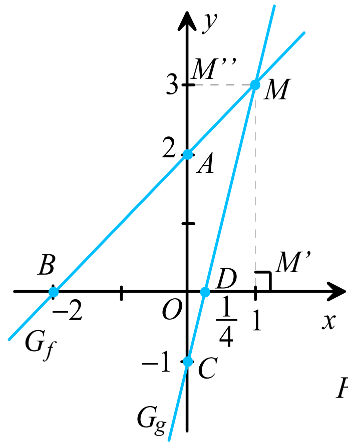


Figura 29

PROBLEME

1 Stabiliți dacă următoarele puncte sunt coliniare:

a) $A(0, -2)$; $B(1, 1)$; $C(-1, 5)$;

b) $A(1, 1)$; $B(2, 0)$; $C(4, -2)$.

2 Fie funcțiile $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 2x - 1$ și $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g(x) = 3x + 1$.

Reprezentați în același sistem de coordonate graficele celor două funcții și aflați coordonatele punctelor de intersecție.

3 Se consideră funcția

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \sqrt{3}\,x - 3\sqrt{3}.$$

a) Aflați aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f și axele de coordonate.

b) Aflați măsura unghiului format de graficul funcției și axa absciselor.

4 Se consideră funcțiile $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 2x + 3$ și $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g(x) = x + 2$.

a) Aflați coordonatele punctului de intersecție al celor două grafice.

b) Aflați aria suprafeței cuprinse între graficele celor două funcții și axa Ox.

c) Aflați perimetrul patrulaterului convex determinat de graficele celor două funcții și axele Ox și Oy.

5 Fie funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = mx + n$, $m \in \mathbf{Z}$, n număr natural prim. Determinați punctul de pe graficul lui f de coordonate egale cu abscisa mai mică decât n în condițiile în care acesta există.

6 Se dau funcțiile $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x - \sqrt{2}$ și $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g(x) = -x + \sqrt{2}$.

a) Determinați măsura unghiului format de graficele celor două funcții și măsura unghiului format de graficul lui f cu axa ordonatelor.

b) Calculați aria și perimetrul triunghiului determinat de graficele celor două funcții și axa ordonatelor.

7 Arătați că reprezentările grafice ale funcțiilor $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 2x + 1$ și $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g(x) = 2x - 3$ sunt două drepte paralele.

8 Se dau funcțiile $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 4x - 8$ și $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g(x) = -4x + 24$.

a) Aflați aria și perimetrul triunghiului determinat de graficele celor două funcții și axa absciselor.

b) Aflați aria triunghiului determinat de graficele celor două funcții și axa ordonatelor.

c) Aflați tangenta unghiului determinat de graficul lui f și axa absciselor.

9 Fie funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 2x + 1$.

a) Determinați punctele de pe graficul lui f egal depărtate de axele de coordonate.

b) Calculați suma: $S = f(5) + f(6) + \ldots + f(25)$.

Lecția 6. Elemente de statistică: indicatorii tendinței centrale (frecvență, medie, mediană, mod și amplitudine a unui set de date)

Statistica este o ramură a matematicii care se ocupă cu culegerea, gruparea, analizarea și interpretarea datelor referitoare la anumite fenomene, precum și unele previziuni privind desfășurarea acestor date în viitor.

Exemplu Pentru a determina nivelul de pregătire la matematică al unui grup de elevi *se culeg* date cu privire la notele obținute într-o perioadă de timp determinată, date ce conțin anumite caracteristici, precum: frecvența cu care apare fiecare notă, media notelor obținute de fiecare elev, cât și media notelor obținută de întreg grupul de elevi.

Astfel pentru *analiza* și *interpretarea* datelor culese un rol important îl are determinarea *tendinței* referitoare la nivelul clasei, tendința exprimată prin *nivelul mediu* de pregătire la obiectul matematică al grupului de elevi studiat.

Conceptele de bază ale statisticii sunt: frecvența relativă și absolută, mărimea statistică, stabilirea unor legături între mărimi, valoarea medie, mediană, modul și amplitudinea unui set de date referitoare la o mulțime numită *populație statistică.*

Definiție

- *Populație statistică* este orice mulțime definită de obiecte de aceeași natură.
- Elementele unei populații se numesc *unități statistice* sau *indivizi*.
- *Caracteristica* (*variabila statistică*) a populației este trăsătura comună tuturor unităților (indivizilor) populației. Caracteristica poate fi *cantitativă* sau *calitativă.*

În statistică indicatorii tendinței centrale (de medie) se referă la valorile de mijloc ale unui set de date. Indicatorii de medie cel mai frecvent folosiți sunt media, mediana și modulul, care depind de frecvența datelor statistice.

✓ Frecvența unui set de date

Definiție

- Se numește *frecvență absolută* a unei valori x a caracteristicii numărul de unități ale populației corespunzătoare acestei valori.
- Se numește *frecvență relativă* a unei valori x a caracteristicii raportul dintre frecvența absolută a valorii x și efectivul total al populației.

Exemplu După notarea tezelor la matematică, o clasă de 25 de elevi a avut următorul rezultat în ordine alfabetică a elevilor: 7, 6, 8, 9, 5, 10, 4, 5, 4, 6, 7, 5, 5, 4, 4, 10, 8, 7, 9, 4, 6, 6, 4, 5, 4.

Atunci, pentru studiul cât mai corect al tendinței medii a clasei, este util să se determine în primul rând frecvența cu care apare fiecare notă (frecvența absolută) cât și frecvența relativă. Aceasta se poate organiza în următorul tabel:

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Frecvența absolută	7	5	4	3	2	2	2
Frecvența relativă	$\frac{7}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$

✓ Media unui set de date

Primul contact în studiul unui set de date statistice îl vom avea cu *valori medii*. Acestea sunt utilizate frecvent atât în planificare şi conducere, cât şi în diverse cercetări ştiinţifice. Aplicarea corectă a metodei valorilor medii necesită respectarea următoarelor condiţii.

- Calcularea mediilor trebuie să se bazeze pe un număr cât mai mare de cazuri individuale.
- Valorile din care se va calcula media să fie omogene.
- Alegerea acelui tip de medie care corespunde cel mai bine caracteristicii studiate.

Exemplu Să revenim la tabelul din exemplul dat la frecvenţa absolută.

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Frecvenţa absolută	7	5	4	3	2	2	2

Calculând media aritmetică a notelor obţinute, avem: $m_{\text{aritmetică}} = \dfrac{4+5+6+7+8+9+10}{7} = 7$. Acest rezultat ar fi fost sugestiv dacă toate notele aveau aceeaşi frecvenţă. Ţinând cont de realitate, media ponderată oferă un rezultat mai „exact” al mediei notelor obţinute.

Astfel $m_{\text{ponderată}} = \dfrac{7\cdot 4+5\cdot 5+4\cdot 6+3\cdot 7+2\cdot 8+2\cdot 9+2\cdot 10}{25} = 6{,}08$.

Dacă în cazul mediei aritmetice am putea spune că nivelul de pregătire al elevilor a fost mediu (media este 7), în cazul mediei ponderate concluzia este că nivelul de pregătire este cu mult mai scăzut decât cel mediu, puţin peste cel de promovare.

Reţine!

Media nivelurilor individuale ale unei variabile (caracteristică) statistice este expresia sistematizării într-un singur nivel reprezentativ a tot ceea ce este esenţial, tipic şi obiectiv în dezvoltarea acestuia.

✓ Mediana unui set de date

Definiţie

Mediana este valoarea ce împarte în două o *colecţie ordonată* de date. Numărul valorilor variabilelor mai mici decât mediana este egal cu numărul valorilor mai mari decât aceasta.

Reţine!

- Dacă setul de date conţine un număr impar de valori ordonate, atunci mediana coincide cu valoarea din mijlocul ordonării.
- Dacă setul de date conţine un număr par de valori ordonate, atunci mediana este media aritmetică a perechii din mijloc.
- Mediana unui set de date nu depinde de frecvenţa absolută sau relativă a variabilei caracteristicii.

Exemplu La Olimpiada de Matematică, unde punctajul maxim este de 28 de puncte, au fost obținute de către elevii clasei a VIII-a următoarele punctaje: 18, 23, 16, 10, 27, 15, 20. Ordonând punctajele crescător obținem: 10, 15, 16, 18, 20, 23, 27. Deoarece numărul de date este impar, deducem că mediana este 18, adică termenul din mijloc al ordonării. După contestație setul de date se modifică astfel: 18, 23, 17, 10, 27, 20, 22, 24. Ordonând crescător noul set de date avem: 10, 17, 18, 20, 22, 23, 24, 27. Deoarece noul set de date este în număr par, iar termenii din mijloc sunt 20 și 22, mediana noului set este media aritmetică a celor două valori, adică 21.

✓ Modulul (dominanta) unui set de date

Definiție

Modulul (*dominanta*) reprezintă valoarea caracteristicii care are frecvența cea mai mare.

Comentariu În practică se pot întâlni următoarele situații:

- setul de date conține o singură dominantă;
- setul de date conține mai multe valori dominante;
- dacă toate variabilele au aceeași frecvență de apariție, vom spune că setul de date nu conține o valoare caracteristică.

Exemplu La un centru de calitate al produselor, se verifică diametrul pieselor prelucrate de un strung. Pentru realizarea acestui control s-a verificat o selecție de 20 de piese. Rezultatele au fost înregistrate în tabelul următor:

Număr de piese	2	5	4	6	3
Diametrul (*în* mm)	2,98	2,99	3	3,01	3,02

Dominanta este diametrul de 3,01 mm a cărui frecvență este cea mai mare, respectiv la 6 piese.

Reprezentarea grafică cu coloane a datelor din tabel este realizată în *Figura* 30. Pe axa $(Ox$ este reprezentat numărul fiecărui tip de piesă, iar pe axa $(Oy$ sunt reprezentate diametrele pieselor.

Ordonând crescător diametrele pieselor avem:
2,98; 2,99; 3; 3,01; 3,02 și deci mediana setului de date este 3, ceea ce putea fi obținut și din analiza graficului cu bare.

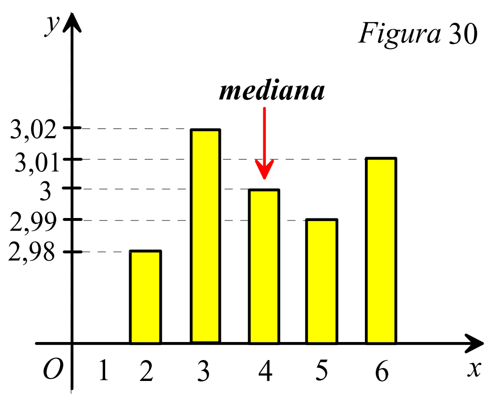


Figura 30

✓ Amplitudinea unui set de date

Definiție

Amplitudinea unui set de date este diferența dintre valoarea maximă și valoarea minimă a setului de date.

Comentariu Amplitudinea, fiind calculată numai pe baza valorilor extreme ale setului de date, nu oferă posibilitatea cunoașterii structurii interioare a colectivității. În cazul în care valorile extreme sunt nesemnificative numeric, rezultatul ne poate conduce la concluzii greșite.

Exemplu În *Figura* 31 prezentăm trei seturi de date cu aceeași amplitudine, dar cu structură internă diferită. Cele trei seturi de date se referă la rezultatele obținute la olimpiada de matematică de către cei nouă reprezentanți a trei clase diferite. În acest exemplu $x_{\min} = 5$, iar $x_{\max} = 9,80$. Pentru fiecare din cele trei seturi de date amplitudinea este egală cu 4,80. Din studiul reprezentărilor deducem în plus că elevii clasei a VIII-a B au obținut cele mai bune rezultate în timp ce elevii clasei a VIII-a C au obținut rezultatele cele mai slabe.

Figura 31

Problemă rezolvată

Într-o firmă sunt 200 de angajați al căror salariu net este dat de următorul tabel:

Salariu lunar	*Număr de angajați*
1200-1500	70
1500-1600	20
1600-1700	10
1700-1800	25
1800-1500	45
1900-2000	20
2000-2100	10

a) Realizați graficul setului de date; b) Determinați grafic mediana;
c) Determinați amplitudinea și caracteristica setului de date.

Soluție Graficul este dat de *Figura* 32 în care pe axa *Ox* sunt reprezentate intervalele de salarizare, iar pe axa *Oy* frecvențele intervalelor de salarizare.

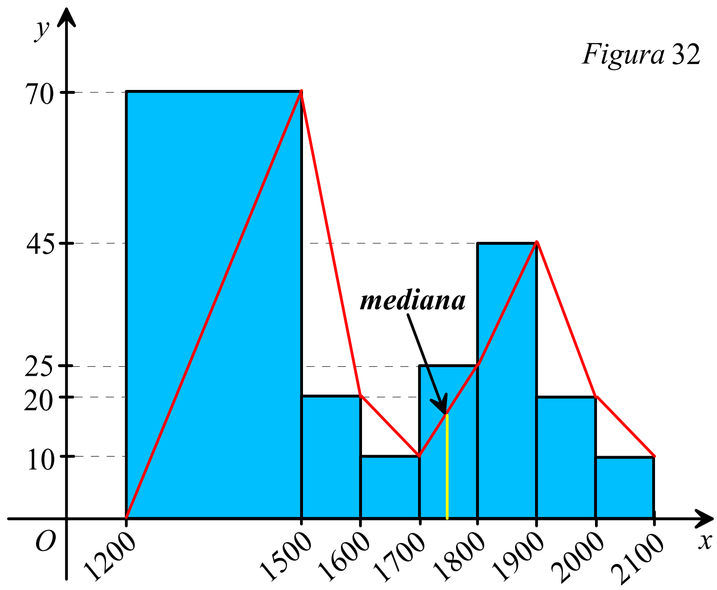


Figura 32

.

Din grafic obținem că mediana este media aritmetică a valorilor 1700 și 1800, adică 1750 lei.

Amplitudinea setului de date este dată de diferența dintre numărul maxim de angajați care au salariu în același interval și numărul minim de angajați cu aceeași proprietate. Obținem frecvența egală cu $70 - 10 = 60$.

Caracteristica este dată de intervalul 1200-1500 în care frecvența este cea mai mare.

PROBLEME

1 Următoarea diagramă cu batoane prezintă mediile obținute de elevii unei clase la geografie pe semestrul trecut.

a) Alcătuiți tabelul frecvențelor statistice.

b) Determinați media, mediana și modulul.

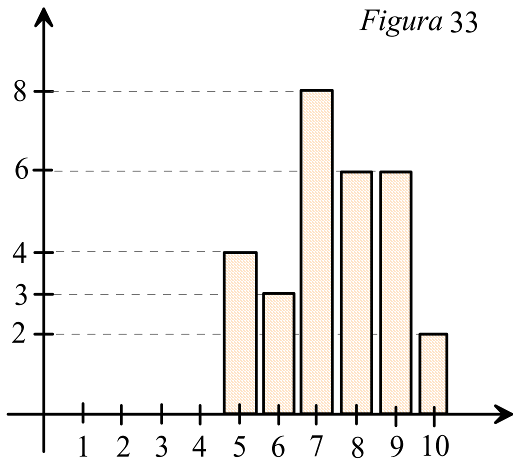


Figura 33

2 La examenul de Evaluare Națională, cei 300 de elevi ai unei școli au obținut la proba de matematică următoarele rezultate:

Nota	Numărul de elevi
$5-5,49$	4
$5,50-5,99$	6
$6-6,49$	14
$6,50-6,99$	20
$7-7,49$	64
$7,50-7,99$	103
$8-8,49$	27
$8,50-8,99$	39
$9-9,49$	15
$9,50-10$	8

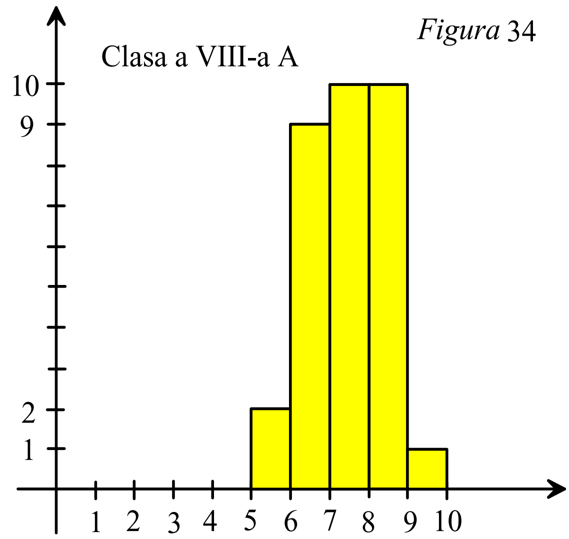
a) Reprezentați graficul cu bare și determinați poligonul frecvențelor.

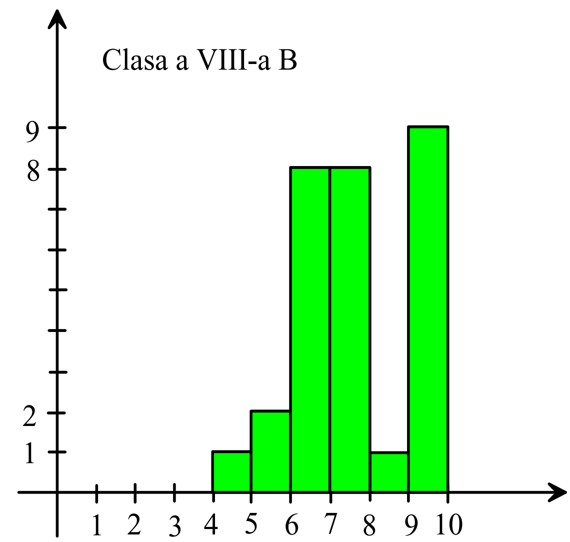
b) Determinați media, mediana și dominanta.

3 În primele 15 zile ale lunii iulie, temperatura la Craiova, la ora 14, a înregistrat următoarele valori: $31^\circ, 32^\circ, 32^\circ, 33^\circ, 35^\circ, 38^\circ, 30^\circ, 31^\circ, 30^\circ, 28^\circ, 29^\circ, 29^\circ, 34^\circ, 35^\circ, 36^\circ$. Alcătuiți diagrama (reprezentarea grafică) acestui set de date.

4 Reprezentările din *Figura* 34 exprimă mediile generale obținute de elevii claselor a VIII-a A și a VIII-a B pe semestrul trecut.

Figura 34





a) Care clasă este mai bună la matematică?

b) Care este mediana, modulul și amplitudinea datelor pentru fiecare clasă în parte?

c) Alcătuiți diagrama corespunzătoare elevilor celor două clase luate împreună. Comparați în acest caz mediana, modulul și amplitudinea cu cele corespunzătoare obținute la punctul b).

PROBLEME RECAPITULATIVE

Recomandate pentru portofoliu personal

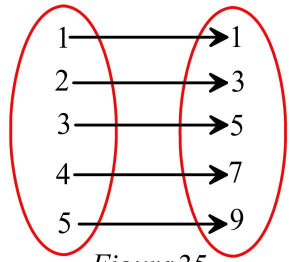


Figura 35

1 Considerăm funcția $f: \{1,2,3,4,5\} \to \{1,3,5,7,9\}$, definită prin diagrama din *Figura* 35.
a) Realizați tabelul de valori al funcției.
b) Găsiți relația matematică ce exprimă dependența dintre x și $f(x)$.

2 Considerăm funcția $f: \{1, 2, 3, 4\} \to \{11, 12, 13, 14\}$, având următorul tabel de valori:

x	1	2	3	4
$f(x)$	11	12	13	14

Exprimați corespondența: a) printr-o diagramă; b) printr-o relație matematică.

3 Fie funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = -ax + 5$. Determinați valoarea lui $a \in \mathbf{R}$ știind că punctul $A(-5, 20)$ aparține graficului funcției.

4 Reprezentați grafic funcțiile:
a) $f: \{0, 1, 2, 3, -3\} \to \mathbf{R}, f(x) = -3x$; b) $g: \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \to \mathbf{R}, g(x) = |x| - 3$.

5 Stabiliți care dintre punctele următoare aparțin graficului funcției $f: \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}, f(x) = -x^2 + 3$:
$A(0, 3)$; $B(\sqrt{3}, 0)$; $C(3, -3)$; $D(-4, -13)$; $E(-2, 7)$.

6 Se dă funcția $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, f(x) = -2x + 3$.
a) Determinați punctul de pe graficul funcției care are abscisa egală cu -4;
b) Determinați punctul de pe graficul funcției care are ordonata egală cu -5;
c) Determinați punctul de pe graficul funcției care are coordonatele egale.

7 Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = ax$, $a \in \mathbf{R}^*$ o funcție liniară. Demonstrați că:
a) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$; b) $f(kx) = kf(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$, unde $k \in \mathbf{R}$.

8 Se consideră funcțiile $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = ax + 9$ și $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g(x) = 5x + b$, unde $a, b \in \mathbf{R}$, ale căror grafice se intersectează în punctul $A(3, 18)$.
a) Aflați distanțele de la originea O a sistemului de coordonate la graficele celor două funcții.
b) Aflați aria și perimetrul triunghiului determinat de graficele celor două funcții și axa absciselor.

9 Determinați $a \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(1, 2)$; $B(2, 3)$ și $C(-3, a)$ să fie coliniare.

10 Fie funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \sqrt{6}\,x - \sqrt{2}$.
a) Aflați aria suprafeței cuprinse între graficul lui f și axele de coordonate.
b) Calculați distanța de la originea sistemului de coordonate la graficul lui f.
c) Aflați tangenta unghiului format de graficul lui f cu axa Ox.

11 Considerăm funcțiile $f, g, u, v: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite prin relațiile $f(x) = 2$, $g(x) = -1$, $u(x) = x + 1$, $v(x) = x - 3$.
a) Reprezentați grafic cele patru funcții în același sistem de axe.
b) Demonstrați că punctele de intersecție ale graficelor sunt vârfurile unui paralelogram.
c) Calculați aria acestui paralelogram.

12 Reprezentați grafic funcțiile: a) $f:[0;5]\to\mathbf{R}, f(x)=x$; b) $g:(5;\infty)\to\mathbf{R}, g(x)=-4x+19$.

13 Determinați mulțimea valorilor funcției $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}, f(x)=4x-1$.

14 Fie funcția $f:I\to\mathbf{R}, f(x)=ax+b$. Determinați intervalul I și numerele reale a, b, știind că graficul funcției este segmentul închis AB unde $A(0,3)$ și $B(3,12)$.

15 Reprezentați grafic funcțiile: $f:\{1,2,3,4\}\to\mathbf{R}, f(x)=4-x$; $g:[1,4]\to\mathbf{R}, g(x)=4-x$; $h:(1,4)\to\mathbf{R}, h(x)=4-x$; $u:[1,\infty)\cap(1,4)\to\mathbf{R}, u(x)=4-x$; $v:(-\infty,4]\to\mathbf{R}, v(x)=4-x$.

16 Catetele unui triunghi dreptunghic au lungimile de 6 cm și x cm. Reprezentați grafic funcția $A:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, unde $A(x)$ reprezintă aria triunghiului în cm^2.

17 Un excursionist parcurge un traseu cu viteza constantă de 4 km/oră. Reprezentați grafic funcția $d:[0,4]\to\mathbf{R}$, unde $d(t)$ este distanța parcursă în timpul t. (Distanța este exprimată în kilometri, iar timpul este exprimat în ore.)

18 Considerăm funcția $f:\{1,2,3,4,5,6\}\to\mathbf{N}$ prin care fiecărui element al mulțimii $\{1,2,3,4,5,6\}$ îi corespunde numărul divizorilor săi naturali. Realizați tabelul de valori și reprezentați grafic funcția. Precizați imaginea funcției.

19 Reprezentați grafic funcția $f:\{0,1,2,3,4,5\}\to\mathbf{N}$, unde pentru fiecare $n\in\{0,1,2,3,4,5\}$, $f(n)$ reprezintă restul împărțirii lui n la 3.

20 Alcătuiți tabelul de valori al funcției al cărei grafic este reprezentat în *Figura* 36. Găsiți domeniul de definiție și mulțimea valorilor funcției.

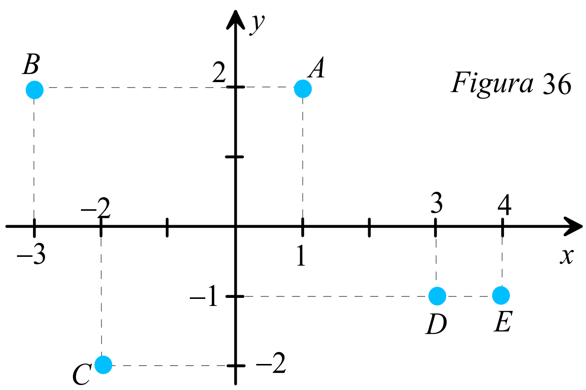


Figura 36

TEST DE AUTOEVALUARE

Recomandat pentru portofoliu personal

10p din oficiu

SUBIECTUL I - Pe foaia de rezolvare scrieți numai rezultatele. (30 de puncte)

5p 1. Fie $f:\{-1,0,1,4,5\}\to\mathbf{R}, f(x)=-\frac{x^2}{2}+3$. Dacă $M(4;a)\in G_f$, atunci valoarea lui a este . . .

5p 2. Dacă $f:\{-1,1,2\}\to\{a,0,2\}, f(x)=x+1$, este o funcție, atunci a este egal cu . . .

5p 3. Dacă graficul funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=mx+3$, trece prin $A(3,6)$, atunci $m=$ . . .

5p 4 Dacă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x-1)+f(x+1)=2x,$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$, atunci $f(1)+f(-1)=\ldots$

5p 5 Punctul $A(m;m-1)$ aparține graficului funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=2x+1,$ pentru m egal cu . . .

5p 6 Dacă $f:\{-1,0,1\}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2+1,$ numărul de elemente al mulțimii Imf este . . .

SUBIECTUL al II-lea - Precizați litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

5p 1 Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=(m^2-1)x+m+1,\ m\in\mathbf{R}$. Valoarea lui m pentru care reprezentarea grafică este paralelă cu Ox este:

A. 1 **B.** -1 **C.** 1 sau -1 **D.** 0

5p 2 Dacă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ și $f(x+2)=5x+2-2f(1),$ oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$, atunci $f(1)$ este egal cu:

A. 1 **B.** -1 **C.** 0 **D.** 2

5p 3 Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=-2x+3$. Numărul $f(-1)+f(1)$ este egal cu:

A. 0 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 6

5p 4 Reprezentarea grafică a funcției $f:[-1,2]\to\mathbf{R}, f(x)=3x-5$ este:

A. o dreaptă **B.** o semidreaptă **C.** un segment **D.** puncte coliniare

5p 5 Numărul de funcții $f:\{1,2,3\}\to\{-1,0,1,2,3,4,5\}$ cu proprietatea $f(1)=1$ și $f(2)=3$ este:

A. 7 **B.** 5 **C.** 1 **D.** 6

5p 6 Numărul real m, pentru care $M(3,m-3)$ aparține reprezentării grafice a funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=2x-5$ este:

A. -1 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 0

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de rezolvare scrieți rezolvările complete. (30 de puncte)

10p 1 Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\mathrm{f}(x)=ax+b,\ a\in\mathbf{R},\ b\in\mathbf{R}$.

a) Determinați numerele reale a și b, știind că reprezentarea grafică a funcției este dreapta AB cu $A(0;2)$ și $B(-1;1)$.

b) Determinați coordonatele punctului de intersecție dintre AB și Ox.

c) Aflați distanța de la originea sistemului de axe la dreapta AB.

10p 2 Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=(2-\sqrt{5})x+\sqrt{5}$.

a) Arătați că $A(1;2)\in G_f$.

b) Rezolvați în $\mathbf{R}$, inecuația $f(x)-2\geq 0$.

c) Determinați numerele raționale a și b, știind că $M(a;\ b+b\sqrt{5})$ se află pe graficul lui f.

10p 3 Fie funcțiile $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=-\frac{1}{2}x+3$ și $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, g(x)=2x-1$.

a) Reprezentați grafic f și g în același sistem de coordonate.

b) Determinați măsura unghiului dintre reprezentările grafice ale funcțiilor f și g.

c) Calculați suma $S=f(1)-f(2)+f(3)-f(4)+\ldots+f(19)-f(20)$.

*

* *

4 ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

Lecția 1. Puncte, drepte, plane: convenții de notare

Geometria este una dintre cele mai vechi ramuri ale matematicii. Primele cunoștințe de geometrie, vechi de câteva milenii, aveau un caracter practic. În Babilon și în Egiptul antic, cunoștințele de geometrie erau folosite în agricultură, construcții, astronomie. Adevărurile geometrice erau obținute și verificate în mod experimental. În Grecia antică, începând cu *Thales* și continuând cu *Pitagora*, *Euclid*, *Arhimede*, matematicienii au devenit preocupați de stabilirea adevărurilor prin raționament logic.

În cartea sa *Elementele*, (carte scrisă în secolul III î.H. și care a dominat matematica elementară timp de peste două milenii), *Euclid* a sistematizat cunoștințele de matematică acumulate în perioadele precedente, prezentându-le în înlănțuirea lor logică și realizând demonstrațiile teoremelor pe baza unui sistem de axiome.

Euclid-Matematician grec
323-285 î.H.

Edificiul geometriei are la bază *noțiunile primare* și *axiomele*. *Noțiunile primare* (*fundamentale*) sunt noțiuni care nu pot fi definite. *Axiomele* sau *postulatele* sunt propoziții al căror adevăr este evident sub aspect intuitiv și care nu se demonstrează.

Punctul, *dreapta*, *planul*, *spațiul* sunt noțiuni geometrice fundamentale. Ele nu pot fi definite în mod riguros, dar pot fi înțelese sau descrise pornind de la imagini din realitatea înconjurătoare. Astfel, urma lăsată de un creion bine ascuțit pe o foaie de hârtie ne poate da imaginea unui *punct*. Un fir de ață subțire, bine întins, prelungit la nesfârșit în ambele sensuri, ne dă imaginea unei *drepte*. Suprafața tablei de scris, prelungită la nesfârșit în toate direcțiile constituie o imagine despre ceea ce numim *plan*.

În clasele precedente, în capitolele de geometrie ați studiat proprietăți ale unor figuri geometrice (cum sunt dreapta, segmentul, semidreapta, unghiul, triunghiul, patrulaterul, cercul) incluse într-un plan dat. Capitolele de geometrie studiate până în prezent fac obiectul geometriei plane.

Cubul sau paralelipipedul dreptunghic sunt corpuri geometrice care nu pot fi incluse într-un plan. Studiul lor și cel al altor corpuri geometrice fac obiectul geometriei în spațiu.

În limbajul obișnuit, prin spațiu înțelegem tot ce ne înconjoară.

Spațiul geometric este o mulțime de puncte pe care o vom nota cu *S*. În geometria în spațiu se păstrează convențiile de desen și de notație folosite în geometria plană.

Punctele se reprezintă ca în *Figura* 1 și se notează cu litere mari ale alfabetului latin.

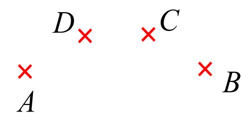


Figura 1

Dreptele se notează cu litere mici *a*, *b*, *c*, . . . sau *AB*, *CD* etc. (vezi *Figura* 2).

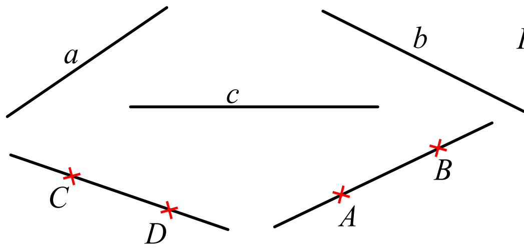


Figura 2

În spațiu există o infinitate de puncte drepte și plane. Planele se notează cu litere mici ale alfabetului grecesc α, β, γ și se reprezintă prin desen ca în *Figura* 3.

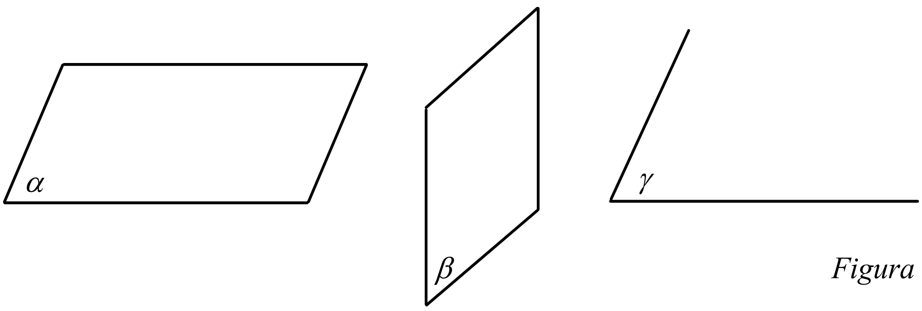


Figura 3

În geometria plană, realizarea desenelor nu ridică probleme deosebite. Nu același lucru se întâmplă în cadrul geometriei în spațiu. Dificultatea constă în faptul că trebuie să reprezentăm în plan imaginea unei figuri spațiale.

Desenul, asemenea unei fotografii, depinde de poziția din care este privită figura spațială.

Să privim în jurul nostru. Presupunem că pe o masă se află o farfurie rotundă și o coală de hârtie dreptunghiulară, astfel încât privind de sus vedem imaginea din *Figura* 4. Atunci imaginea mesei, văzută din față este cea din *Figura* 5.

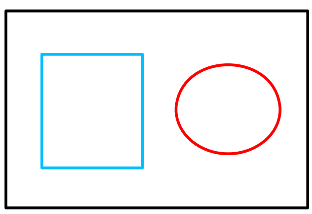


Figura 4

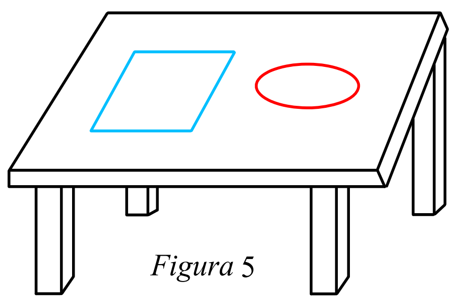


Figura 5

Pentru a realiza desene ale unor figuri spațiale, ținem seama de unele *convenții*:

- figurile situate în plan vertical în fața privitorului se reprezintă în forma lor reală;
- segmentele care au direcția razei virtuale, se reprezintă înclinate și de lungime mai mică în raport cu lungimea reală;
- reprezentările în desen ale unor drepte paralele sunt, de asemenea, paralele;
- elementele care *„nu se văd”* se reprezintă punctat.

Exemplu În *Figura* 6 este desenat un cub. Pătratele $ABB'A'$ și $CDD'C'$, situate în plan vertical în fața noastră, sunt redate în desen în forma lor reală. Segmentele BC, AD, $B'C'$, $A'D'$, având direcția razei virtuale, sunt desenate înclinat și de lungime mai mică. Segmentele AD, CD și DD' nu se văd, deci le reprezentăm punctat.

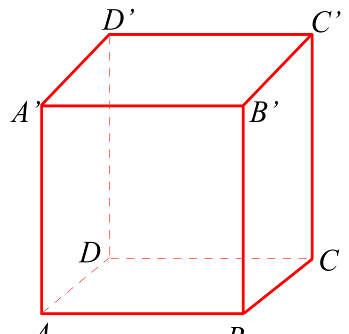


Figura 6

Reține!

Dreptele, planele, spațiul sunt mulțimi de puncte. Deci, relațiile dintre puncte, drepte și plane se pot exprima în limbajul teoriei mulțimilor.

Exemplu În *Figura* 7 paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$ este așezat pe un plan orizontal α.

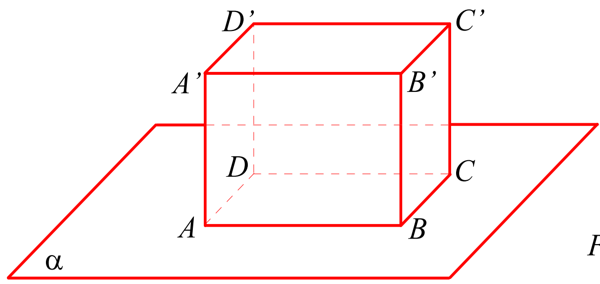


Figura 7

Între elementele figurii putem stabili diferite relații, ca de exemplu:

- Punctul A este situat pe dreapta AB (scriem: $A \in AB$).
- Punctul C nu este situat pe dreapta AB (scriem: $C \notin AB$).
- Punctul D este situat în planul α (scriem: $D \in \alpha$).
- Punctul B' nu este situat în planul α (scriem: $B' \notin \alpha$).
- Dreapta AB este inclusă în planul α (scriem: $AB \subset \alpha$).
- Dreapta AA' nu este inclusă în planul α (scriem: $AA' \not\subset \alpha$).
- Dreptele AB și AD se intersectează în punctul A (scriem: $AB \cap AD = \{A\}$).
- Dreapta BB' intersectează planul α în punctul B (scriem: $BB' \cap \alpha = \{B\}$).
- Dreptele AB și $A'B'$ nu au puncte comune (scriem: $AB \cap A'B' = \emptyset$).

PROBLEME

1 Dați exemple de paralelipipede dreptunghice pe care le întâlnim în realitatea înconjurătoare.

2 Care este numărul minim de culori necesare pentru a colora fețele unui cub, dacă oricare două fețe alăturate ale cubului sunt colorate diferit?

3 În *Figura* 8, identificați desenele care reprezintă aceeași figură geometrică, văzută din poziții diferite.

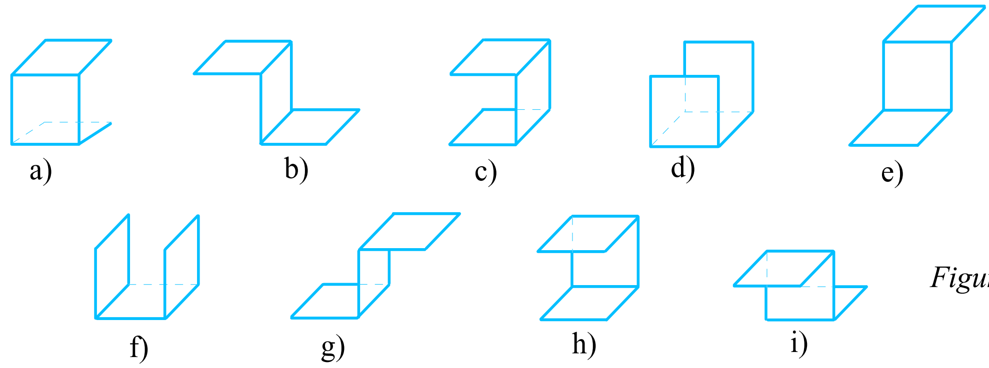


Figura 8

4 Desenați un cub $MNPQM'N'P'Q'$, având baza $MNPQ$ situată într-un plan orizontal γ. Stabiliți relații între elementele figurii și exprimați-le în limbaj matematic, folosind simbolurile $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$.

5 Un zar de formă cubică are proprietatea potrivit căreia suma punctelor înscrise pe oricare două fețe opuse este aceeași. Care dintre următoarele desene (vezi *Figura* 9) poate constitui desfășurarea acestui zar?

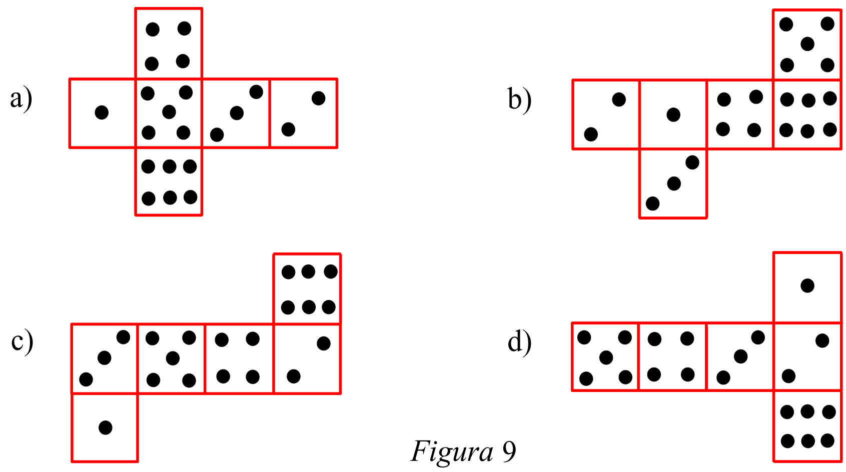


Figura 9

6 Câte paralelipipede dreptunghice mici sunt în *Figura* 10?

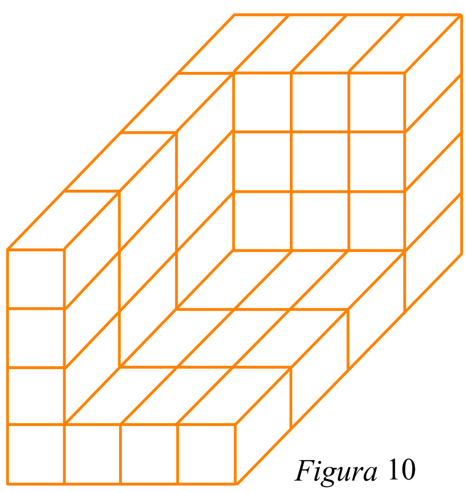


Figura 10

Lecția 2. Determinarea dreptei, determinarea planului, relații între puncte, drepte și plane

Cele mai simple relații între puncte, drepte și plane pot fi descrise cu ajutorul *axiomelor*.

✓ Determinarea dreptei

Una dintre axiomele geometriei plane afirmă că două puncte distincte din plan determină o dreaptă. Înțelesul acestei axiome este următorul: oricare ar fi două puncte distincte, *există* o dreaptă care le conține și această dreaptă este *unică*. Axioma rămâne adevărată și în spațiu.

A_1: Două puncte distincte determină o dreaptă.

Dreapta determinată de punctele A și B se notează AB.

Consecință a axiomei A_1: Dacă două drepte au două puncte distincte comune, atunci ele coincid.

✓ Poziția unei drepte față de un plan

Dacă așezăm o riglă astfel încât ambele capete ale sale să se afle în planul tablei, atunci rigla se va afla în întregime în planul tablei.

A_2: Dacă două puncte distincte ale unei drepte aparțin unui plan, atunci dreapta determinată de aceste puncte este inclusă în plan.

Afirmația acestei axiome poate fi formulată în limbaj matematic astfel: dacă $A \neq B$, $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, atunci $AB \subset \alpha$ (vezi *Figura* 11).

Din axioma A_2 deducem că o dreaptă se poate afla față de un plan în următoarele poziții:

- dreapta nu are niciun punct comun cu planul;
- dreapta are un singur punct comun cu planul (dreapta *„înțeapă planul”*);
- dreapta este inclusă în plan.

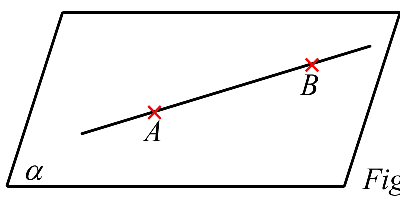


Figura 11

Exemplu Dacă notăm cu α planul în care se află baza $ABCD$ a paralelipipedului dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, atunci dreapta $A'B'$ nu are niciun punct comun cu planul α, dreapta AA' intersectează planul α într-un singur punct, iar dreapta AB este inclusă în planul α (vezi *Figura* 12).

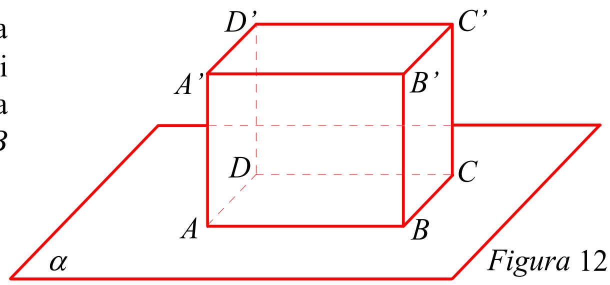


Figura 12

✓ Intersecția a două plane

Este posibil ca două plane să aibă exact un punct comun?

Pentru a răspunde la această întrebare, să considerăm planul caietului (notat cu α) și planul mesei (notat cu β). Dacă așezăm caietul ca în *Figura* 13, cele două plane nu vor avea în comun doar punctul A, pentru că planele sunt nemărginite. Cele două plane se intersectează după o dreaptă ce trece prin punctul A.

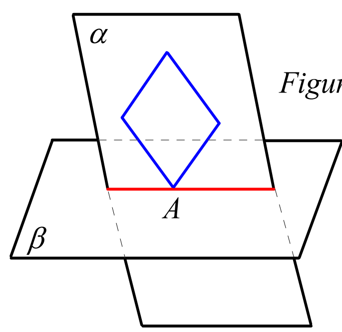


Figura 13

A_3: Dacă două plane au în comun un punct, atunci ele se intersectează după o dreaptă care trece prin acel punct.

✓ Determinarea planului

Câte plane se pot duce prin două puncte date? Pentru a răspunde la această întrebare, ne imaginăm o ușă care se deschide, ocupând diverse poziții, fiecare poziție corespunzând unui plan care trece prin două puncte fixe (puncte reprezentate prin balamalele ușii). Prin două puncte date trec o infinitate de plane.

Deci, două puncte distincte nu sunt suficiente pentru a determina un plan.

Dacă se dau în spațiu trei puncte necoliniare, există un plan care le conține și acest plan este unic.

A_4: Trei puncte necoliniare determină un plan.

Planul determinat de punctele A, B, C se notează cu (ABC) și se citește „planul ABC”.

Consecință a axiomei A_4: Dacă două plane au trei puncte necoliniare comune, atunci ele coincid.

Definiție

- Patru sau mai multe puncte situate în același plan se numesc *puncte coplanare.*
- Două sau mai multe drepte situate în același plan se numesc *drepte coplanare*.

Folosind axioma A_4 se poate demonstra o propoziție care exprimă alte posibilități de a determina un plan.

Propoziție

a) O dreaptă d și un punct A, exterior dreptei, determină un singur plan care se notează: (d, A).

b) Două drepte concurente d_1 și d_2 determină un singur plan care se notează: (d_1, d_2).

c) Două drepte paralele d_1 și d_2 determină un singur plan care se notează: (d_1, d_2).

✓ Poziția relativă a două drepte

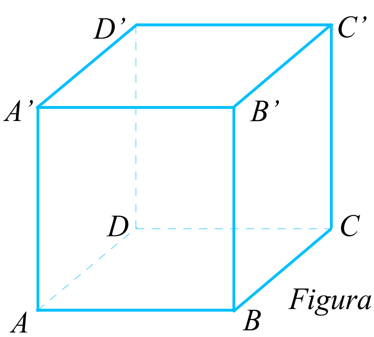


Figura 14

- Două drepte distincte situate în același plan sunt sau concurente sau paralele. În spațiu există și drepte necoplanare. *De exemplu*, dacă $ABCDA'B'C'D'$ este un cub, dreptele AA' și BC sunt necoplanare.
- Două drepte necoplanare nu sunt nici concurente nici paralele.

Reține!

Două drepte (distincte) din spațiu se pot afla una față de alta în următoarele poziții:

drepte → coplanare → paralele / concurente
drepte → necoplanare

În legătură cu dreptele paralele are loc axioma cunoscută sub numele de *axioma paralelelor* sau *postulatul lui Euclid*.

A_5: Printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singură dreaptă paralelă cu dreapta dată.
A_6: Există patru puncte necoplanare.

Probleme rezolvate

1 Fie $ABCD$ un trapez cu $AB \parallel CD$ și M un punct care nu aparține planului (ABC). Demonstrați că planele (MAD) și (MBC) au o dreaptă comună și determinați această dreaptă.

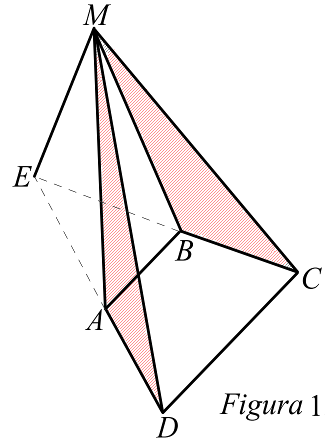


Figura 15

Soluție Planele (MAD) și (MBC) au în comun punctul M, deci se intersectează după o dreaptă care trece prin M. Pentru a determina dreapta, trebuie să găsim încă un punct al ei. Dreptele AD și BC se intersectează într-un punct E.
(Vezi *Figura* 15.)

Din faptul că $E \in AD$ și $AD \subset (MAD)$, rezultă că $E \in (MAD)$.

Din faptul că $E \in BC$ și $BC \subset (MBC)$, rezultă că $E \in (MBC)$.

Planele (MAD) și (MBC) au în comun punctele M și E, deci intersecția lor este dreapta ME.

2 Considerăm în spațiu triunghiurile ABC și DEF nesituate în același plan, astfel încât AB și DE se intersectează în M, AC și DF se intersectează în N, iar BC și EF se intersectează în P.

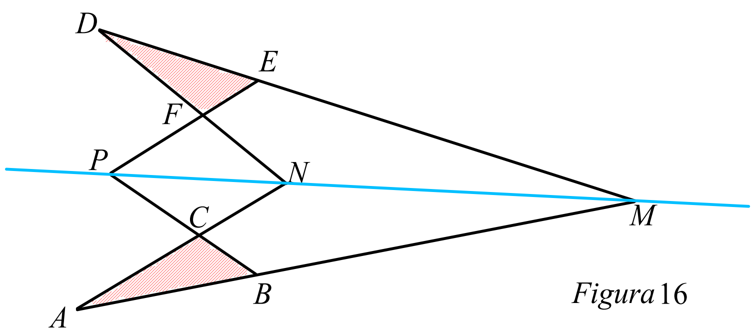


Figura 16

Demonstrați că punctele M, N, P sunt coliniare (vezi *Figura* 16).

Soluție $M \in AB$ și $AB \subset (ABC)$, deci $M \in (ABC)$; $M \in DE$ și $DE \subset (DEF)$, deci $M \in (DEF)$. Analog se arată că punctele N și P aparțin atât planului (ABC), cât și planului (DEF). Dacă punctele M, N, P ar fi necoliniare, atunci planele (ABC) și (DEF) ar coincide, ceea ce contrazice ipoteza. Deci M, N, P sunt coliniare.

PROBLEME

1 a) Câte drepte trec printr-un punct A?
b) Câte plane trec prin două puncte distincte?

2 În desenul din *Figura* 17 punctele A, $B \in \alpha$, $C \in AB$, $D \in \alpha$.
a) Care este poziția punctului C față de planul α?
b) Care este poziția dreptei CD față de planul α?

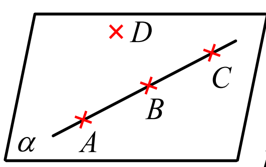


Figura 17

3 Se consideră punctele A și B conținute într-un plan α și $C \notin \alpha$. Dacă M este mijlocul segmentului AC și N este mijlocul segmentului BC, stabiliți valorile de adevăr ale propozițiilor:
a) $M \in \alpha$; b) $M \notin \alpha$; c) $AC \subset \alpha$; d) $AB \subset \alpha$; e) $MB \subset \alpha$; f) $MN \subset \alpha$.

4 Într-un plan α se consideră punctele A, B, C, D despre care se știe că A, B, C sunt coliniare și $D \notin AB$. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $\alpha = (ABD)$; b) Există un plan unic care conține punctele A, B, C?
c) $\alpha = (ADC)$; d) $(ADB) = (BCD)$; e) $B \in (ADC)$.

5 Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare.
a) Este posibil ca printre cele patru puncte să existe trei coliniare? *Justificați răspunsul*!
b) Unind punctele două câte două în toate modurile posibile, câte drepte se obțin?

6 Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare. Câte plane obținem, dacă considerăm toate planele ce trec prin câte trei din cele patru puncte?

7 Se consideră dreptele a, b, c care se intersectează în punctele A, B, C ca în *Figura* 18. Stabiliți valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții:

a) $(b, a) = (a, c)$; b) $(b, c) \neq (b, B)$;
c) $(ABC) = (a, c)$; d) $(ABC) = (AB, C)$;
e) $(ABC) = (AB, AC)$; f) există planul (b, A).

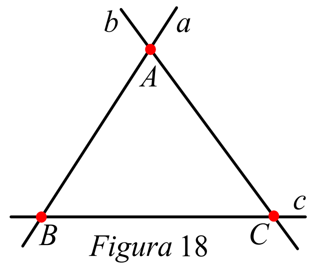


Figura 18

8 În desenul din *Figura* 19, DE este linie mijlocie în triunghiul ABC.
Precizați valorile de adevăr ale propozițiilor:

a) $(ADE) = (ABC)$; b) $DE \subset (ABC)$;
c) $BC \subset (ADE)$; d) $(ABE) = (BC, DE)$.

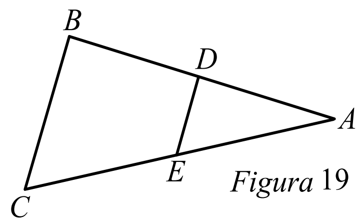


Figura 19

9 Fie dreptele paralele d și g. Dacă $A \in d$, $B \in d$, $D \in g$, $C \in g$, $M \in AD$, $N \in BC$, arătați că $MN \subset (d, g)$.

10 Se consideră punctele necoliniare A, B, C. Dacă $M \in AB$ și $N \in BC$, precizați valorile de adevăr ale următoarelor propoziții:
a) $(ABC) = (BAC)$; b) $M \in (ABC)$; c) $N \in (ABC)$; d) $MN \subset (ABC)$; e) $(ABC) \neq (MNA)$.

11 Se consideră punctele A, B, C, D necoplanare. Completați: a) $(ABC) \cap (ABD) = \dots$;
b) $(ABC) \cap (ACD) = \dots$; c) $(ABC) \cap (BCD) = \dots$; d) $AB \subset \dots$ și $AB \subset \dots$

12 Într-un plan sunt date trei puncte A, B, C și în afara lui un punct D. Unind punctele două câte două în toate modurile posibile, care este numărul maxim de drepte distincte care se poate obține? Dar numărul minim?

13 Triunghiul ABC are laturile AB și AC incluse în planul α. Ce relație este între planul α și (AB, AC)?

14 O dreaptă c intersectează dreptele paralele a și b în punctele A și respectiv B. Arătați că $(a, b) = (a, c)$ și $(a, c) = (b, c)$.

15 Trei drepte trec printr-un același punct și nu sunt în același plan. Câte plane obținem dacă considerăm toate planele ce conțin câte două dintre cele trei drepte?

16 Fie a, b, c trei drepte concurente două câte două, dar fără să aibă un punct comun. Arătați că dreptele sunt coplanare.

17 Fie $ABCD$ un paralelogram și E, un punct care nu aparține planului (ABC). Determinați intersecția planelor (EAC) și (EBD).

Lecția 3. Corpuri geometrice: piramida, piramida regulată, tetraedrul regulat

Imaginea 20 reprezintă o fotografie a piramidei lui *Keops*, una dintre cele șapte minuni ale lumii, construită în jurul anului 2560 î.H.

Imaginea 20

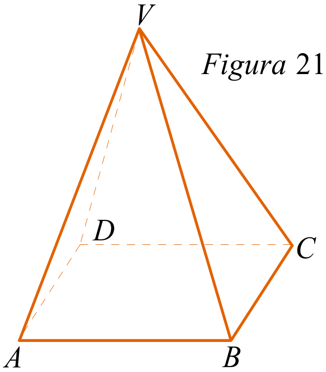


Figura 21

Modelul matematic al piramidei lui *Keops* este corpul geometric reprezentat în *Figura* 21, numit *piramidă patrulateră*.

Pentru a descoperi noțiunea geometrică de piramidă, reamintim mai întâi noțiunea de suprafață poligonală. Pentru un poligon dat, numim suprafață poligonală reuniunea dintre poligon și interiorul său.

Mulțimile hașurate în *Figura* 22 sunt suprafețe poligonale.

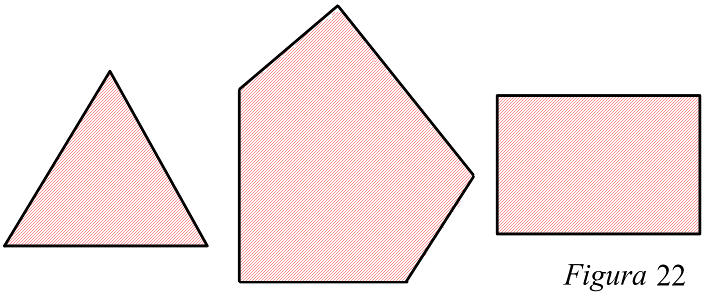


Figura 22

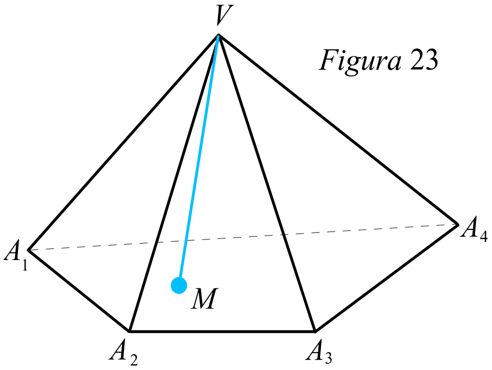


Figura 23

În *Figura* 23 este reprezentată o piramidă având baza un patrulater oarecare.

Dacă $A_1A_2A_3A_4$ este un patrulater inclus într-un plan α, iar V este un punct care nu aparține planului α, piramida $VA_1A_2A_3A_4$ este corpul solid mărginit de suprafața poligonală $A_1A_2A_3A_4$ și de suprafețele triunghiulare VA_1A_2, VA_2A_3, VA_3A_4 și VA_4A_1.

Cu alte cuvinte, piramida $VA_1A_2A_3A_4$ este mulțimea obținută reunind toate segmentele de forma VM, unde M descrie suprafața poligonală $A_1A_2A_3A_4$.

Elementele piramidei $VA_1A_2A_3A_4$ sunt următoarele:

- *Baza piramidei*: suprafața poligonală $A_1A_2A_3A_4$.
- *Vârful piramidei*: punctul V.
- *Muchiile piramidei*: *muchiile bazei* sunt segmentele: A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 și A_4A_1; *muchiile laterale* sunt segmentele: VA_1, VA_2, VA_3 și VA_4.
- *Fețele laterale ale piramidei* sunt suprafețele triunghiulare: VA_1A_2, VA_2A_3, VA_3A_4 și VA_4A_1.

Observație Prin *vârfurile* piramidei $VA_1A_2A_3A_4$ înțelegem atât vârful V, cât și vârfurile bazei, iar prin *fețele* piramidei înțelegem atât baza, cât și fețele laterale.

Analog se poate trata cazul general al piramidei $VA_1A_2...A_n$, având ca bază un poligon cu n laturi, unde n este orice număr natural, $n \geq 3$.

Această piramidă are: $2n$ muchii (n muchii laterale și n muchii ale bazei), $n+1$ fețe (n fețe laterale la care se adaugă baza) și $n+1$ vârfuri (n vârfuri ale poligonului bazei la care se adaugă vârful V).

✓ Clasificarea piramidelor după forma bazei

Piramidele se pot clasifica în funcție de numărul laturilor poligonului ce formează baza. Astfel, avem piramide triunghiulare, patrulatere, pentagonale, hexagonale etc.

✓ Piramida regulată

Definiție

O piramidă se numește *piramidă regulată* dacă baza este un poligon regulat, iar muchiile laterale sunt congruente.

Exemple **1.** Piramidele egiptene sunt piramide patrulatere regulate.

2. Piramida care are ca bază un triunghi echilateral, iar muchiile laterale sunt congruente este o piramidă triunghiulară regulată.

✓ Tetraedrul regulat

Definiție

- O piramidă triunghiulară se numește *tetraedru*.
- Un tetraedru ale cărui fețe sunt toate triunghiuri echilaterale se numește *tetraedru regulat*.

Tetraedrul are patru fețe triunghiulare, patru vârfuri și 6 muchii. (Vezi *Figura* 24.)

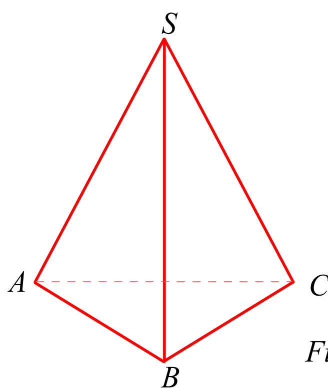


Figura 24

Observații

1. Oricare patru puncte necoplanare determină un tetraedru, având vârfurile în punctele date.

2. Cuvântul *tetraedru* este de origine greacă și înseamnă poliedru cu 4 fețe. Prin poliedru, înțelegem un corp solid mărginit de suprafețe poligonale. Piramida și paralelipipedul sunt exemple de poliedre.

Desfășurarea piramidei

Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată. Ne imaginăm suprafața piramidei alcătuită din carton. Dacă tăiem cartonul de-a lungul muchiilor laterale, îndoim și rotim fețele laterale până când ajung în același plan, obținem desfășurarea din *Figura* 25.

Aceasta nu este singura desfășurare posibilă a piramidei considerate.

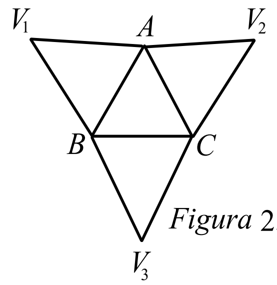


Figura 25

De exemplu, dacă tăiem de-a lungul muchiilor VA, AC și BC, obținem desfășurarea din *Figura* 26.
Invers, pornind de la o desfășurare, putem reconstitui piramida.
Analog, se poate vorbi de desfășurarea altor corpuri geometrice.

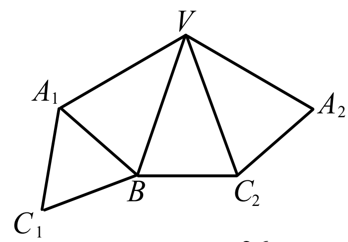


Figura 26

Probleme rezolvate

1 Demonstrați că, dacă $ABCDA'B'C'D'$ este un cub, atunci $ACB'D'$ este un tetraedru regulat.

Soluție Punctele A, C, B', D' sunt necoplanare, deci sunt vârfurile unui tetraedru. Notăm cu a lungimea laturii cubului.
Atunci $AC = AB' = B'C = AD' = CD' = B'D' = a\sqrt{2}$, deci tetraedrul este regulat (vezi *Figura* 27).

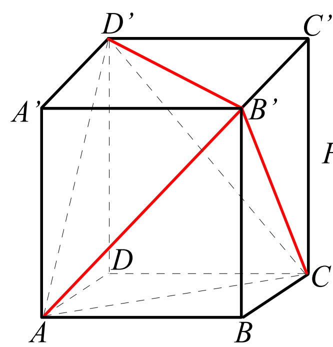


Figura 27

2 Demonstrați că muchia laterală a unei piramide hexagonale regulate este mai mare decât muchia bazei.

Soluție Notăm baza piramidei cu $ABCDEF$ și vârful cu V (vezi *Figura* 28).
Fie $AB = a$ și $VA = b$. Hexagonul regulat $ABCDEF$ poate fi înscris într-un cerc de diametru AD. Cum raza cercului circumscris hexagonului regulat este congruentă cu latura, deducem că $AD = 2a$. În triunghiul VAD, avem $AD < VA + VD$, adică $2a < b + b$, de unde $a < b$.

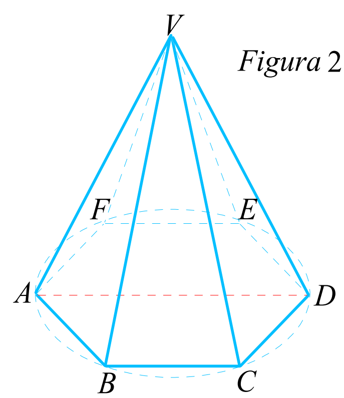


Figura 28

PROBLEME

1 Numiți corpurile geometrice din *Figura* 29:

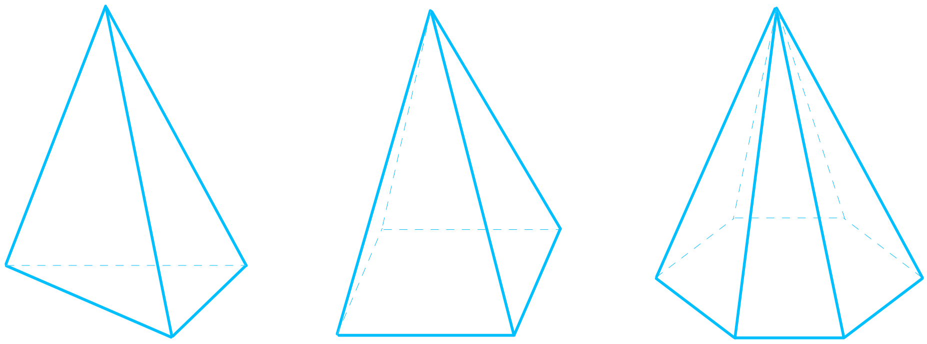


Figura 29

2 Completați tabelul:

Piramida	Numărul de			V + F	M + V
	fețe (F)	vârfuri (V)	muchii (M)		
triunghiulară					
patrulateră					
pentagonală					
hexagonală					

Ce concluzie puteți formula, analizând ultimele două coloane ale tabelului?

3 Îndoiți un triunghi ascuțitunghic după liniile mijlocii până când cele trei vârfuri coincid. Ce corp geometric obțineți?

4 Confecționați din carton o piramidă triunghiulară cu toate muchiile egale cu 10 cm. Calculați aria suprafeței de carton necesară.

5 Care este numărul maxim de triunghiuri echilaterale pe care îl putem obține din 6 chibrituri, fără a tăia niciun chibrit?

6 Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:

p: Orice tetraedru regulat este o piramidă triunghiulară regulată;
q: Orice piramidă triunghiulară regulată este un tetraedru regulat.
Justificați răspunsurile!

7 Fie *ABCD* un tetraedru regulat. Notăm cu *M* mijlocul muchiei *AB* și cu *N* mijlocul muchiei *CD*.

a) Demonstrați că triunghiurile *ABN* și *CDM* sunt isoscele.
b) Determinați intersecția planelor (*ABN*) și (*CDM*).

8 a) Cum se numește piramida care are 4 vârfuri?
b) Cum se numește piramida care are 7 vârfuri?
c) Cum se numește piramida care are 8 muchii?
d) Cum se numește piramida cu 6 muchii congruente?

9 *Figura* 30 reprezintă desfășurarea pe un plan a unei piramide patrulatere cu baza un pătrat și având toate muchiile egale cu 10 cm.
a) Calculați VV'.
b) Confecționați din carton figura alăturată și apoi prin lipire o piramidă patrulateră.
c) Puteți obține și o altă desfășurare pe plan a piramidei confecționate?

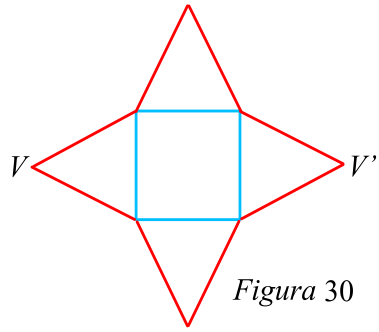


Figura 30

10 O piramidă patrulateră regulată are baza $ABCD$ și vârful S. Dintre muchiile piramidei, indicați: a) o pereche de muchii concurente; b) o pereche de muchii paralele; c) o pereche de muchii necoplanare.

11 Fie $SABC$ o piramidă triunghiulară. Notăm cu M, N, P, respectiv mijloacele muchiilor BC, CA și AB ale bazei. Demonstrați că planele (SAM), (SBN) și (SCP) au o dreaptă comună.

12 Fie $ABCD$ un tetraedru regulat de muchie 6 cm.
a) Calculați suma lungimilor tuturor muchiilor tetraedrului.
b) Calculați suma ariilor fețelor tetraedrului.

TEME DE SINTEZĂ

Recomandate pentru lucru în echipe

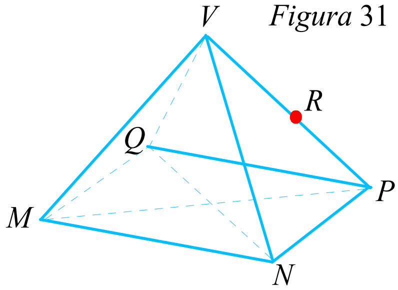
1 Pe o masă rotundă este așezată o față de masă pătrată, astfel încât centrul de simetrie al pătratului coincide cu centrul cercului. Diametrul mesei este de 80 cm, latura feței de masă este de 1,20 m, iar înălțimea mesei este de 75 cm. La ce înălțime față de podea se vor afla colțurile feței de masă?

2 Se consideră în spațiu cinci puncte A, B, C, D, E, astfel încât oricare trei dintre ele sunt necoliniare. Aflați probabilitatea potrivit căreia, dacă luăm la întâmplare o dreaptă determinată de două dintre cele 5 puncte, aceasta să nu treacă prin A.

3 Fie o piramidă triunghiulară regulată $SBAC$ de vârf S, $\sphericalangle ASB = 40^\circ$ și $SA = 20\,\text{cm}$. O furnică pleacă din punctul A și se deplasează pe suprafața laterală a piramidei, revenind în punctul A după ce a trecut printr-un punct situat pe muchia SB și printr-un punct situat pe muchia SC. Calculați lungimea minimă a drumului parcurs de furnică.

4 Fie $SABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu baza $ABCD$ și cu toate muchiile egale cu $2a$, $a > 0$. Punctele E și F sunt mijloacele muchiilor AD, respectiv BC.
a) Calculați suma ariilor fețelor piramidei $SABCD$.
b) Calculați aria triunghiului SEF.

5 Andrei merge într-o tabără de alpinism. El escaladează o stâncă care are forma unei piramide patrulatere regulate $VMNPQ$ cu vârful V, având toate muchiile de lungime 12 m. Știind că pleacă din punctul M și ajunge în punctul R, mijlocul muchiei VP, deplasându-se în linie dreaptă pe fețele (VMN), (VNP) și că a parcurs drumul de lungime minimă între cele două puncte, arătați că drumul parcurs de Andrei este mai mare de 15 m. (Vezi *Figura* 31.)

Figura 31


Lecția 4. Prisma dreaptă, paralelipipedul dreptunghic, cubul

✓ Descrierea prismei; elementele prismei; clasificare

În *Figura* 32 sunt reprezentate două cutii de bomboane.

Prima are ca baze (baza superioară și cea inferioară) două pătrate. A doua cutie are ca baze două hexagoane regulate.

Fețele laterale ale cutiilor sunt dreptunghiuri.

Corpurile geometrice din *Figura* 32 vor fi numite prisme.

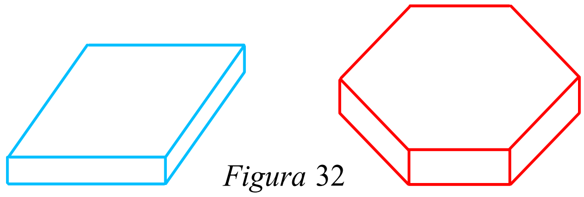


Figura 32

Definiție

- Prisma este un poliedru mărginit de două baze care sunt poligoane congruente nesituate în același plan și de fețele laterale care sunt paralelograme.
- Numele unei prisme este dat de numărul laturilor bazei.

În *Figura* 33 este reprezentată o prismă triunghiulară *ABCA'B'C'*.

Elementele acestei prisme sunt:

- bazele: triunghiurile *ABC* și *A'B'C'*;
- fețele laterale: paralelogramele *ABB'A'*, *BCC'B'* și *ACC'A'*;
- vârfurile: *A*, *B*, *C*, *A'*, *B'*, *C'*;
- muchiile laterale: *AA'*, *BB'*, *CC'*.

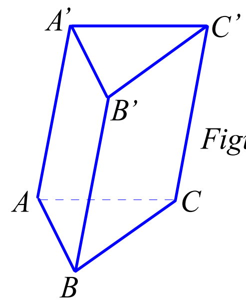


Figura 33

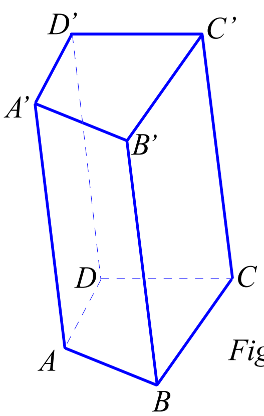


Figura 34

În *Figura* 34 este reprezentată o prismă patrulateră *ABCDA'B'C'D'*.

În cele ce urmează, ne vom concentra atenția asupra prismelor care au fețele laterale dreptunghiulare, deoarece majoritatea prismelor întâlnite în realitatea înconjurătoare se încadrează în această categorie.

Definiție

- Se numește *prismă dreaptă*, o prismă ale cărei fețe laterale sunt dreptunghiuri.
- Prismele care nu sunt drepte se numesc *prisme oblice*.
- Prismele drepte care au ca baze poligoane regulate se numesc *prisme regulate*.

Exemplu Prismele din *Figura* 32 sunt drepte, iar prismele din *Figurile* 33 și 34 sunt oblice. Prismele din *Figura* 32 sunt prisme regulate și anume: o prismă patrulateră regulată și o prismă hexagonală regulată.

✓ Paralelipipedul dreptunghic

Definiție

- Se numește *paralelipiped dreptunghic* o prismă dreaptă cu baza dreptunghi.
- Paralelipipedul dreptunghic are șase fețe dreptunghiulare, 8 vârfuri și 12 muchii.

Numeroase obiecte din realitatea înconjurătoare au forma unor paralelipipede dreptunghice. *De exemplu*: dulapul, cutia de chibrituri, sala de clasă. Lungimile a trei muchii concurente ale unui paralelipiped dreptunghic se numesc *dimensiunile paralelipipedului dreptunghic*.

Aceste dimensiuni poartă numele de lungime, lățime și înălțime (vezi *Figura* 35).

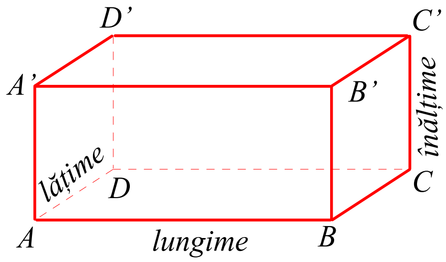


Figura 35

✓ Cubul

Un caz particular al paralelipipedului dreptunghic îl constituie *cubul*.

Definiție

Cubul este un paralelipiped dreptunghic cu toate dimensiunile egale.

Reține!

Toate cele șase fețe ale cubului sunt pătrate.

Cubul din *Figura* 36 are toate cele patru fețe laterale și cele două baze pătrate.

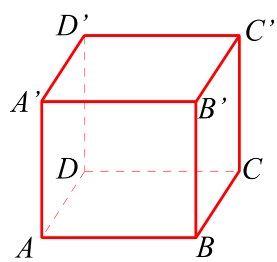
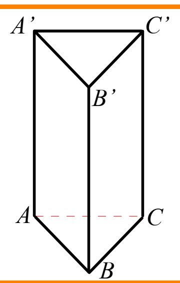
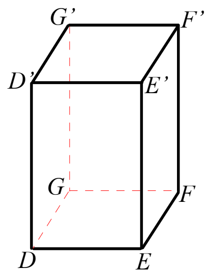
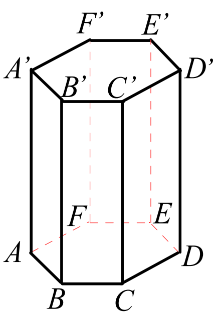
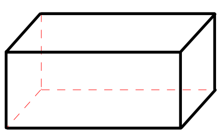
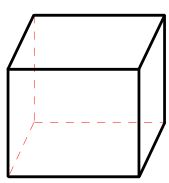


Figura 36

Observație

O prismă patrulateră regulată este un paralelipiped dreptunghic care are două dimensiuni egale.

Tabelul următor cuprinde exemple de prisme drepte.

Corp geometric	Desen	Două baze congruente	Fețele laterale au formă de dreptunghi	Nr. vârfuri	Nr. muchii	Nr. fețe
Prisma triun-ghiulară regulată		ΔABC și $\Delta A'B'C'$ triunghiuri echilaterale congruente	$ABB'A'$ față laterală	6	9	5
Prisma patrulateră regulată		$DEFG$ și $D'E'F'G'$ pătrate congruente	$DEE'D'$ față laterală	8	12	6
Prisma hexagonală regulată		$ABCDEF$ și $A'B'C'D'E'F'$ hexagoane regulate congruente	$CDD'C'$ față laterală	12	18	8
Paraleli-piped dreptunghic		Are toate fețele dreptunghiuri.		8	12	6
Cubul		Are toate fețele pătrate.		8	12	6

PROBLEME

1 Confecționați din carton corpuri geometrice care au următoarele desfășurări:

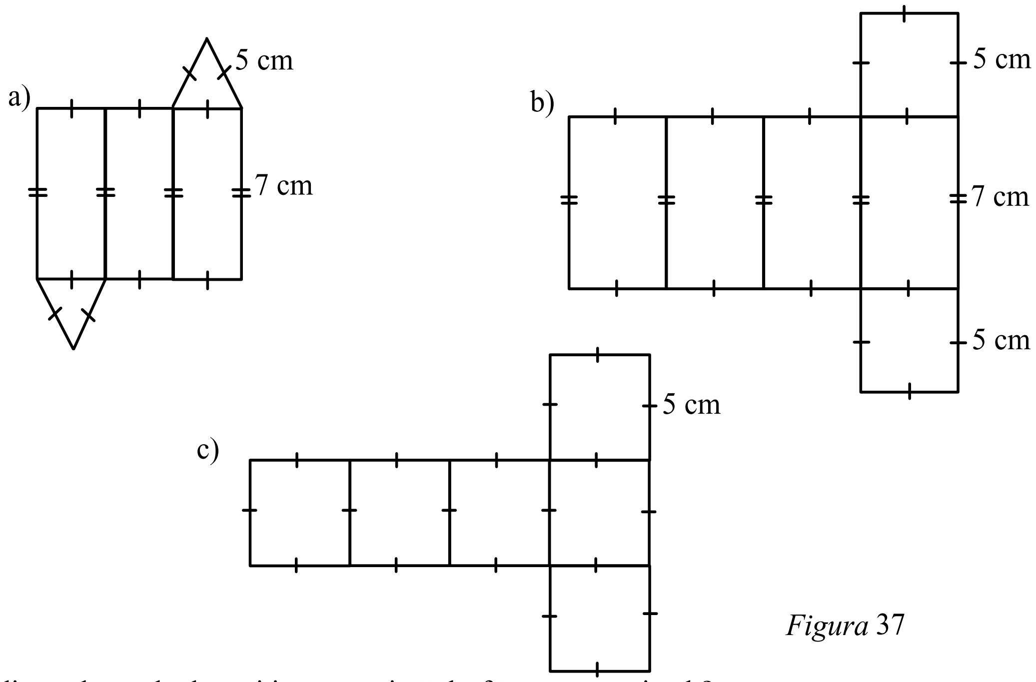
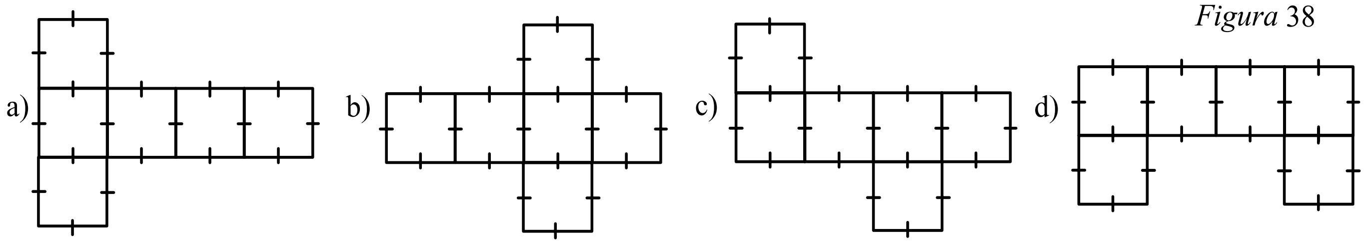


Figura 37

2 Care dintre desenele de mai jos reprezintă desfășurarea unui cub?

Figura 38



3 Care dintre desenele de mai jos reprezintă desfășurarea unui paralelipiped dreptunghic?

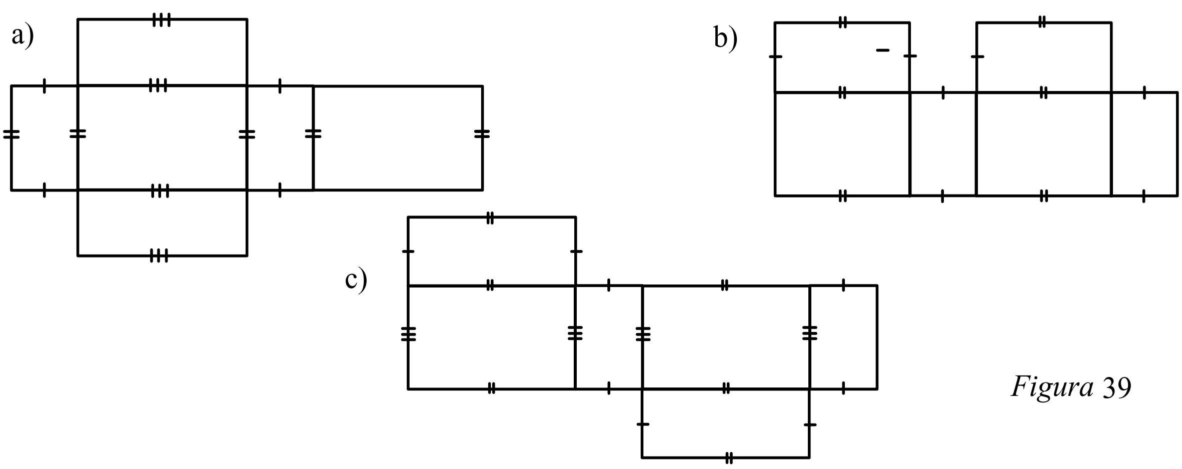


Figura 39

Confecționați din carton aceste desfășurări și apoi prin îndoire confecționați paralelipipedul (în cazul în care este posibil).

4 Desfășurarea unui cub are aria egală cu $36\,cm^2$. Aflați lungimea muchiei cubului.

5 O prismă hexagonală regulată are toate muchiile congruente, având lungimea de 8 cm. Aflați aria desfășurării.

6 a) Confecționați din carton o prismă hexagonală regulată cu toate muchiile de 5 cm.
b) Desenați o prismă hexagonală dreaptă.
c) Desenați desfășurarea prismei confecționate la punctul a).

7 O prismă triunghiulară regulată are toate muchiile congruente, având lungimea de 8 cm.
Aflați aria desfășurării.

8 În *Figura* 40 este reprezentată o clădire având forma unei prisme drepte.

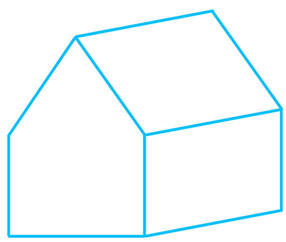


Figura 40

Desenați prisma, notați vârfurile sale și precizați-i elementele.

9 Precizați cum se numește o prismă care are:

a) 6 vârfuri; b) 10 vârfuri; c) 8 fețe;
d) 4 fețe laterale; e) 5 muchii laterale; f) 12 muchii.

10 În *Figura* 41 este reprezentată desfășurarea unei prisme drepte $ABCA'B'C'$. Baza prismei este triunghiul ABC dreptunghic în A cu $AB = 12\,cm$ și $AC = 9\,cm$. Știind că $BMM'B'$ este un pătrat, calculați dimensiunile dreptunghiului $ANN'A'$.
Desenați figura pe un carton și construiți prisma.

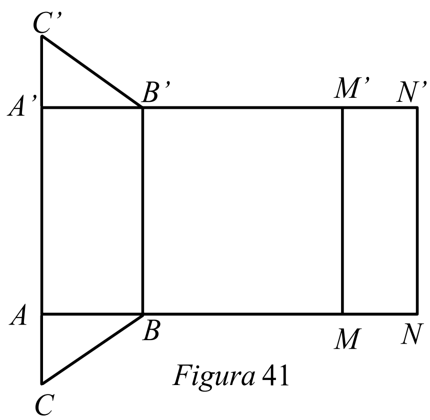


Figura 41

11 O prismă triunghiulară regulată $ABCDEF$ are $AB = 4\,cm$ și $AD = 5\,cm$. O furnică pleacă din A și ajunge în D pe drumul cel mai scurt, traversând toate fețele laterale ale prismei.
a) Desfășurați pe un plan prisma.
b) Trasați drumul parcurs de furnică și calculați lungimea acestuia.

Lecția 5. Cilindrul circular drept
Conul circular drept

✓ Descrierea cilindrului circular drept
Elementele cilindrului circular drept

Multe dintre obiectele pe care le întâlnim și le folosim frecvent în cotidian, ca de exemplu: monede, cutii, vase de uz casnic, recipiente, tuburi etc., au forme de cilindru circular drept. (Vezi *Figura* 42.)

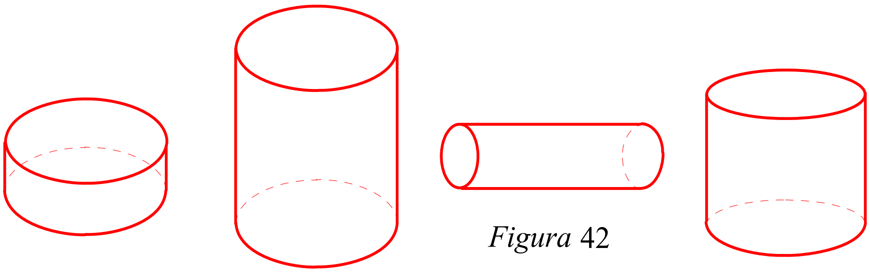


Figura 42

În *Figura* 43, am reprezentat o suprafață dreptunghiulară $OO'A'A$. Dacă această suprafață se rotește în jurul dreptei OO', se obține un cilindru circular drept.
Spunem că cilindrul circular drept este un corp de rotație.

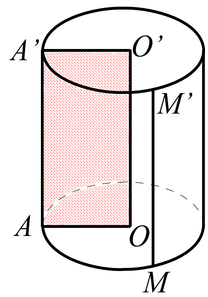


Figura 43

Definiție

Cilindrul circular drept este corpul de rotație care se obține prin rotirea unei suprafețe dreptunghiulare în jurul uneia dintre laturile sale.

Vom pune în evidență elementele sale.

- Prin rotirea suprafeței dreptunghiulare $OO'A'A$ în jurul lui OO', segmentul OA descrie discul de centru O și rază OA, iar segmentul $O'A'$ descrie discul de centru O' și rază $O'A'$.

Cele două discuri constituie *bazele* cilindrului circular drept. Bazele sunt două discuri de raze egale.

- Dreapta OO' determinată de centrele bazelor se numește *axa* cilindrului (axa de rotație).
- Segmentul AA' și oricare dintre pozițiile ocupate de acest segment în cursul rotației poartă numele de *generatoare*. Deci o generatoare a cilindrului circular drept este un segment MM', unde M și M' aparțin respectiv cercurilor celor două baze, iar patrulaterul $OMM'O'$ este un dreptunghi.

✓ Desfășurarea cilindrului circular drept

O generatoare a cilindrului circular drept, rotindu-se în jurul axei, generează suprafața laterală a cilindrului. În *Figura* 44 este reprezentată o cutie de carton cilindrică a cărei suprafață este colorată în roșu, iar bazele sunt hașurate.

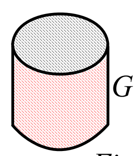


Figura 44

Decupând cercurile bazelor și tăind suprafața laterală de-a lungul unei generatoare, suprafața cutiei poate fi desfășurată pe un plan. (Vezi *Figura* 45.)

Desfășurarea suprafeței laterale este un dreptunghi având o dimensiune egală cu lungimea cercului bazei, iar cealaltă dimensiune egală cu generatoarea cilindrului.

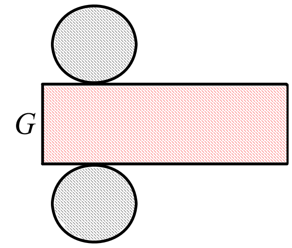


Figura 45

✓ Descrierea conului circular drept
Elementele conului circular drept

În viața cotidiană, în natură, în tehnică, întâlnim obiecte care au formă de con, cum sunt: diverse vase, recipiente (în formă de conuri cu vârful în jos), pâlnii, acoperișurile unor turnuri, vârfuri ale unor unelte, vârfurile creioanelor ascuțite cu ascuțitoarea; formele de relief numite conuri vulcanice au aproximativ formă de con.

Conul circular drept este un corp de rotație.

În *Figura* 46, am reprezentat o suprafață trunghiulară VAO cu unghiul O de 90°. Dacă această suprafață se rotește în jurul dreptei VO, se obține un con circular drept.

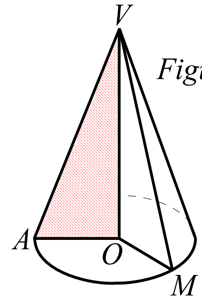


Figura 46

Vom pune în evidență elementele unui con circular drept.

- Punctul V reprezintă *vârful* conului;
- Prin rotirea suprafeței triunghiulare VAO în jurul catetei VO, segmentul OA descrie discul de centru O și rază OA. Acest disc constituie *baza* conului circular drept;
- Dreapta VO reprezintă *axa* conului (axa de rotație);
- Segmentul VA și oricare dintre pozițiile ocupate de acest segment în cursul rotației poartă numele de *generatoare*. Așadar, o generatoare a conului circular drept este un segment VM, unde M aparține cercului bazei.

Definiție

Conul circular drept este un corp de rotație care se obține prin rotirea unei suprafețe triunghiulare drepte în jurul unei catete.

✓ Desfășurarea conului circular drept

Reuniunea tuturor segmentelor VM, unde V este vârful conului, iar punctul M este mobil pe cercul bazei, formează suprafața laterală a conului.

Desfășurarea pe un plan a suprafeței laterale a unui con circular drept este un sector circular a cărui rază este generatoarea conului, iar lungimea arcului corespunzător sectorului este egală cu lungimea cercului bazei. (Vezi *Figura* 47.)

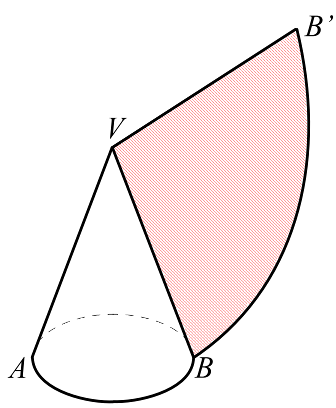


Figura 47

Temă pentru lucru în echipe

Dintr-o bucată de carton, tăiați un sector circular, apoi prin îndoire și lipire, confecționați un coif reprezentând suprafața laterală a unui con circular drept.

Problemă rezolvată

Pentru a urca de la parterul P al unui magazin la etajul E, se folosește o scară „în spirală” ca în figură. Dacă raza „*casei scărilor*” este de 3 m și înălțimea acesteia este de 6 m, iar distanța $EE' = 4$ m, calculați lungimea drumului PE parcurs de o persoană pe scări. (Vezi *Figura* 48.)

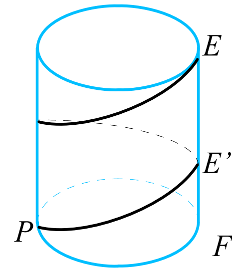


Figura 48

Soluție Desfășurând pe un plan suprafața „*casei scărilor*”, se obține un dreptunghi cu dimensiunile 6π m și 6 m.

Lungimea drumului parcurs de la parter la etaj este suma lungimilor segmentelor PP_1 și $P_1'E$. Avem $PP_1 = \sqrt{36\pi^2 + 16}$ și $P_1'E = \sqrt{9\pi^2 + 4}$ deci $PP_1 + P_1'E = 3\sqrt{9\pi^2 + 4}$ m. (Vezi *Figura* 49.)

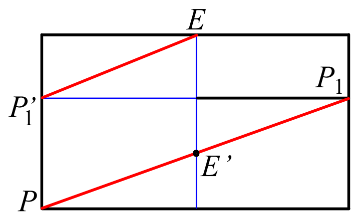


Figura 49

Folosind un calculator, găsim că lungimea drumului este de aproximativ 29 metri.

PROBLEME

1 Un cilindru circular drept are raza bazei $R = 4$ cm și generatoarea $G = 10$ cm. Calculați aria desfășurării suprafeței laterale a cilidrului.

2 Un pahar cilindric are raza de 3 cm și generatoarea de 8 cm. O furnică pornește dintr-un punct M al bazei vasului, ocolește o dată suprafața laterală a paharului și ajunge la baza superioară a paharului într-un punct N situat pe aceeași generatoare cu punctul M. Aflați lungimea celui mai scurt drum posibil de la punctul M la punctul N.

3 Un cilindru circular drept are aria bazei 36π cm^2 și generatoarea de 8 cm. Calculați aria desfășurării laterale a cilindrului.

4 Un cilindru circular drept are raza bazei $R = 5$ cm și aria desfășurării laterale egală cu 80π cm^2. Calculați lungimea generatoarei cilindrului.

5 Desfășurarea suprafeței laterale a unui cilindru este un pătrat cu latura 20π cm. Calculați ce lungime are diametrul bazei cilindrului.

6 Dați exemple de corpuri din realitatea înconjurătoare care au formă de con.

7 Desfășurarea suprafeței laterale a unui con circular drept este un sector de cerc cu raza $R = 6$ cm și unghiul de 120°. Calculați aria sectorului de cerc și raza bazei conului.

8 Un con circular drept are generatoarea $G = 12$ cm și raza bazei $R = 9$ cm. Calculați unghiul sectorului de arc corespunzător desfășurării suprafeței laterale a conului.

Lecția 6. Paralelism: drepte paralele, unghiul a două drepte

✓ Drepte paralele

Definiție

Două drepte sunt paralele dacă sunt coplanare și nu au puncte comune.

Știm că relația de paralelism în plan are următoarele proprietăți: relația este simetrică (dacă $a \parallel b$, atunci $b \parallel a$) și este tranzitivă (dacă $a \parallel b$ și $b \parallel c$, atunci $a \parallel c$).

Proprietate Două drepte distincte din spațiu paralele cu o a treia dreaptă sunt paralele între ele.

Aplicație Diagonalele unui paralelipiped dreptunghic sunt concurente.

Punctul de intersecție reprezintă mijlocul fiecărei diagonale.

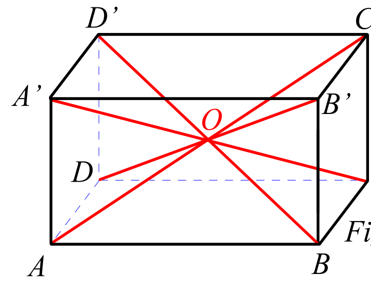


Figura 50

Demonstrație Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic (vezi *Figura* 50). Patrulaterele $ABB'A'$ și $A'B'C'D'$ fiind dreptunghiuri, avem $AB \parallel A'B'$ și $A'B' \parallel C'D'$, deci $AB \parallel C'D'$.

De asemenea, $AB = A'B'$ și $A'B' = C'D'$, deci $AB = C'D'$. Rezultă că $ABC'D'$ este paralelogram, prin urmare segmentele AC' și BD' se intersectează în mijlocul fiecăruia. Fie O, acest punct.

Se arată analog că patrulaterul $ADC'B'$ este paralelogram, deci mijloacele diagonalelor sale coincid, adică mijlocul lui $B'D$ coincide cu mijlocul O al lui AC', apoi că patrulaterul $BCD'A'$ este paralelogram, deci mijloacele diagonalelor sale coincid, adică mijlocul lui CA' coincide cu mijlocul O al lui BD'.

Observație Din demonstrația anterioară deducem că intersecția diagonalelor este centru de simetrie al paralelipipedului dreptunghic.

✓ Măsura unghiului a două drepte în spațiu

Cunoaștem modul în care se definește măsura unghiului a două drepte din plan.

- Dacă dreptele sunt concurente, ele formează patru unghiuri, dintre care două ascuțite și două obtuze, sau toate patru, drepte. Măsura unghiului celor două drepte este măsura unuia dintre unghiurile ascuțite (sau drepte).
- Dacă dreptele sunt paralele sau coincid, măsura unghiului lor este *zero grade*.

Rămâne să definim măsura unghiului a două drepte necoplanare.

În *Figura* 51 este reprezentată o prismă triunghiulară.

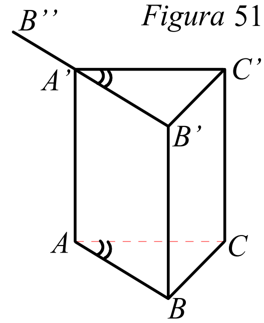


Figura 51

Deoarece fețele laterale $ABB'A'$ și $ACC'A'$ sunt paralelograme, avem $AB \parallel A'B'$ și $AC \parallel A'C'$. Deci unghiurile $\sphericalangle BAC$ și $\sphericalangle B'A'C'$ sunt unghiuri cu laturile respectiv paralele.

Din faptul că triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt congruente (conform cazului L.L.L.), rezultă $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$.

Fie $A'B''$ semidreapta opusă semidreptei $A'B'$. Unghiurile $\sphericalangle BAC$ și $\sphericalangle B''A'C'$ au de asemenea laturile respectiv paralele. Din faptul că $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$, iar $\sphericalangle B'A'C'$ și $\sphericalangle B''A'C'$ sunt suplementare, deducem că unghiurile $\sphericalangle BAC$ și $\sphericalangle B''A'C'$ sunt suplementare.

Teoremă

Două unghiuri cu laturile respectiv paralele sunt congruente sau suplementare.

Mai precis, două unghiuri cu laturile respectiv paralele sunt:
- congruente, dacă sunt amândouă ascuțite sau amândouă obtuze sau dacă unul dintre ele este drept;
- suplementare, dacă unul este ascuțit și celălalt obtuz.

Dacă a și b sunt două drepte necoplanare, le asociem două drepte concurente, în felul următor:

Algoritmul construcției unghiului a două drepte necoplanare
- Printr-un punct oarecare O, ducem dreptele $a' \parallel a$ și $b' \parallel b$.
- Prin definiție, măsura unghiului format de dreptele a și b este măsura unghiului dreptelor a' și b'.
- Scriem $\widehat{a, b} = \widehat{a', b'}$ sau $\widehat{a, b} \equiv \widehat{a', b'}$. (Vezi *Figura* 52 a).)

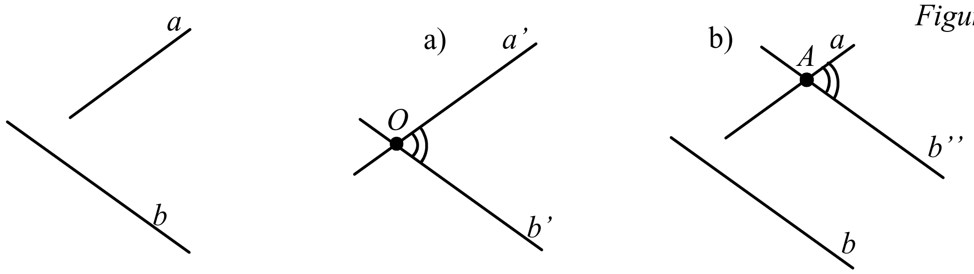


Figura 52

Astfel, dacă alegem pe dreapta a un punct A prin care ducem dreapta $b'' \parallel b$, avem $\sphericalangle(a, b) \equiv \sphericalangle(a, b'')$. (Vezi *Figura* 52 b).)

Observații

1. Din teorema cu privire la unghiurile cu laturile respectiv paralele, rezultă că măsura unghiului dreptelor a' și b' nu depinde de poziția punctului O.

2. În probleme, pentru a pune în evidență unghiul a două drepte necoplanare a și b, este convenabil ca printr-un punct al unei drepte să ducem o paralelă la cealaltă.

De exemplu, dacă $ABCA'B'C'$ este o prismă dreaptă având ca bază un triunghi echilateral, măsura unghiului dreptelor AB și $A'C'$ este măsura unghiului ascuțit format de dreapta AB cu paralela dusă prin A la $A'C'$, adică $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. (Vezi *Figura* 53.)

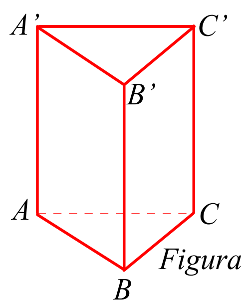


Figura 53

Problemă rezolvată

Fie $ABCD$ un tetraedru regulat. M și N sunt mijloacele muchiilor AB și AC, iar P și Q sunt mijloacele muchiilor CD și BD. Identificați unghiurile dreptelor: a) MN și CD; b) BN și CD; c) PM și NQ; d) AD și BC.

Demonstrați că $MNPQ$ este un pătrat și că $AD \perp BC$.

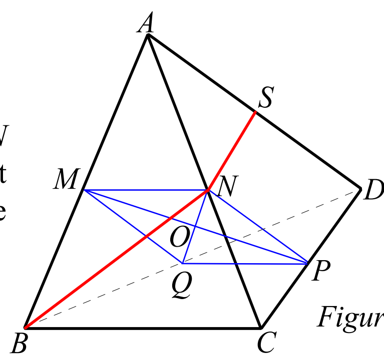


Figura 54

Soluție a) Prin C este dusă paralela BC la MN. (Segmentul MN este linie mijlocie în triunghiul ABC). Rezultă că $\sphericalangle(MN, CD) \equiv \sphericalangle BCD$.

b) Se consideră S, mijlocul lui AD. Avem $NS \parallel CD$, deci $\sphericalangle(BN, CD) = \sphericalangle(BN, NS)$.

c) Patrulaterul $MNPQ$ este romb. Într-adevăr, $MN \parallel BC$ și $PQ \parallel BC$. De asemenea, $MN = PQ = \frac{1}{2}BC$ (sunt linii mijlocii). Cum $MQ = \frac{1}{2}AD$ și deoarece tetraedrul este regulat, obținem $MQ = MN$. Prin urmare $MP \perp NQ$, deci $\sphericalangle(MP, NQ) = \sphericalangle MON$, unde $MP \cap MQ = \{O\}$.

d) $MQ \parallel AD$ și $MN \parallel BC$, deci $\sphericalangle(BC, AD) \equiv \sphericalangle QMN$.

Am demonstrat că $MNPQ$ este romb; arătăm că este de fapt pătrat. Într-adevăr, triunghiurile PAB și NBD sunt congruente (L.L.L.). Segmentele PM și NQ sunt mediane în aceste triunghiuri congruente, prin urmare vom avea $PM = NQ$. Rombul $MNPQ$ având diagonalele congruente, este pătrat. Din $MN \perp MQ$ rezultă $AD \perp BC$.

PROBLEME

1 Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Aflați măsura unghiului dintre dreptele:

a) AA' și DC; b) AA' și BC'; c) AA' și $B'C'$;
d) $A'B$ și DC'; e) BC' și AC; f) $A'B$ și AC.

2 Piramida patrulateră regulată $VABCD$, cu vârful în V are toate muchiile congruente. Determinați măsurile unghiurilor dintre dreptele:

a) VA și DC; b) VA și VC; c) VA și AC; d) VC și DB.

3 În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, $AA' = DC = 6\sqrt{3}$ cm și $BC = 6$ cm. Aflați:

a) măsura unghiului format de dreptele BC' și AD;
b) măsura unghiului format de dreptele DD' și $A'B$;
c) măsura unghiului format de dreptele AC și $A'B'$.

4 Piramida $VABC$ este triunghiulară regulată cu baza ABC, iar M și N sunt mijloacele muchiilor AB respectiv BC. Dacă $AB = 6$ cm și $VA = 3\sqrt{2}$ cm, determinați măsurile unghiurilor dintre dreptele:

a) VA și VC; b) AC și MN; c) MN și VC; d) VM și AC.

5 Prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are latura bazei $AB = 6$ cm și muchia laterală $AA' = 6\sqrt{2}$ cm. Aflați măsura unghiului dintre:

a) AC și $B'C'$; b) AC și BB'; c) $A'B'$ și CC'; d) $A'B'$ și AC; e) BC și $A'B'$.

6 Prisma dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ are baza $ABCD$ un pătrat cu latura egală cu 8 cm și muchia laterală egală cu $8\sqrt{2}$ cm. Aflați măsura unghiului format de dreptele:

a) AC și $B'C'$; b) $A'C$ și AD; c) AC și $D'B'$.

7 Prisma dreaptă $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ are ca bază un hexagon regulat cu latura AB de 10 cm și muchia laterală AA' cu lungimea egală cu $10\sqrt{3}$ cm. Aflați măsura unghiului format de dreptele:

a) BC' și FE; b) CC' și $A'F'$; c) AB și $A'F'$;
d) AB și $B'F'$; e) AB și $B'D'$; f) FC și $B'E'$.

Lecția 7. Dreaptă paralelă cu un plan

Definiție

O dreaptă este paralelă cu un plan dacă nu are puncte comune cu planul. În acest caz putem spune și că planul este paralel cu dreapta.

Planul α și dreapta d din *Figura* 55 a) îndeplinesc condiția $d \cap \alpha = \varnothing$, deci putem scrie $d \parallel \alpha$ sau $\alpha \parallel d$.

Dacă dreapta d nu este paralelă cu planul α, atunci avem următoarele poziții:

a) Dreapta și planul au un singur punct comun. Spunem că dreapta și planul sunt secante sau că dreapta *„înțeapă”* planul. În *Figura* 55 b), $d \cap \alpha = \{A\}$.

b) Dacă două puncte ale dreptei aparțin unui plan, atunci dreapta este inclusă în plan. În *Figura* 55 c), avem $A, B \in \alpha$, deci $AB \subset \alpha$.

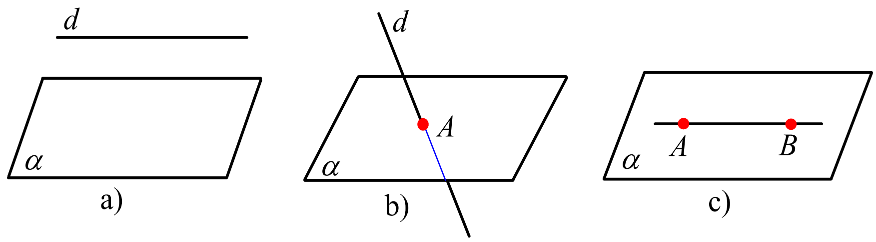


Figura 55

✓ Teoreme de paralelism

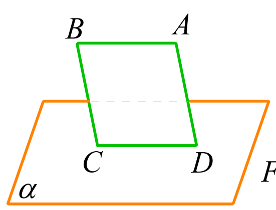


Figura 56

Așezăm un caiet (notat cu $ABCD$ în *Figura* 56), astfel încât latura CD să fie inclusă în planul mesei (notat cu α). La întrebarea „Care este poziția dreptei AB față de planul α?”, răspunsul nu este greu de intuit.

Exemplul precedent ne conduce să formulăm o teoremă utilă pentru demonstrarea paralelismului dintre o dreaptă și un plan.

Teorema 1

Dacă o dreaptă d, nesituată într-un plan α, este paralelă cu o dreaptă b, inclusă în planul α, atunci dreapta d este paralelă cu planul α.

Ipoteză	Concluzie
$d \parallel b$ $b \subset \alpha$ $d \not\subset \alpha$	$d \parallel \alpha$

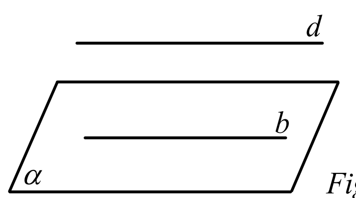


Figura 57

Demonstrație Dreptele paralele d și b determină un plan β. Presupunem că $d \cap \alpha \neq \varnothing$ și fie $d \cap \alpha = \{B\}$. Cum $B \in d$ și $d \subset \beta$, rezultă $B \in \beta$. Punctul B aparține planelor α și β, deci aparține intersecției acestora, adică dreptei b. Am obținut că dreptele d și b au un punct comun B, ceea ce contrazice ipoteza. Presupunerea că $d \cap \alpha \neq \varnothing$ este falsă, deci $d \parallel \alpha$.

Observație Reciproca teoremei 1 de paralelism nu este adevărată, adică: dacă o dreaptă este paralelă cu un plan, nu rezultă că dreapta este paralelă cu orice dreaptă din plan, după cum se poate observa din *Figura* 58 $a \parallel \alpha$, $b \subset \alpha$, dar $a \nparallel b$ (dreptele a și b sunt necoplanare).

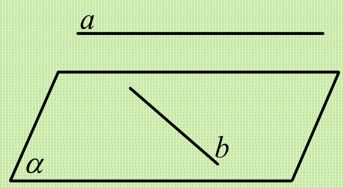


Figura 58

Problemă rezolvată

Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic (vezi *Figura* 59). Demonstrați că $A'C'$ este paralelă cu planul (ABC).

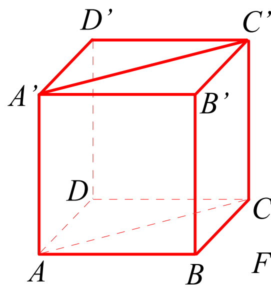


Figura 59

Soluție Din $AA' \parallel BB'$ și $BB' \parallel CC'$, rezultă că $AA' \parallel CC'$, (1).
Din $AA' = BB'$ și $BB' = CC'$, rezultă că $AA' = CC'$, (2).
Din (1) și (2) obținem că $ACC'A'$ este paralelogram, prin urmare $A'C' \parallel AC$.
Deoarece AC este inclusă în planul ABC, obținem $A'C' \parallel (ABC)$.

Teorema 2

Dacă printr-o dreaptă paralelă cu un plan ducem un plan care intersectează planul dat, atunci dreapta de intersecție este paralelă cu dreapta dată.

Ipoteză	**Concluzie**
$d \parallel \alpha$ $d \subset \beta$ $\alpha \cap \beta = b$	$b \parallel d$

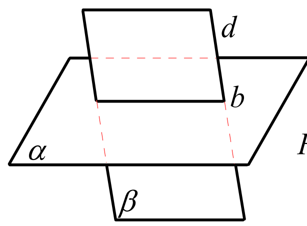


Figura 60

Demonstrație Presupunem că dreptele d și b nu sunt paralele. Fiind coplanare, ele au un punct comun B, punct care aparține atât dreptei d, cât și planului α, ceea ce contrazice ipoteza. Presupunerea că d și b nu sunt paralele este falsă, deci $b \parallel d$.

Observație Planul β din teorema 2 poate fi determinat de d și de un punct oarecare $P \in \alpha$. Aplicând *teorema* 2, obținem că dreapta de intersecție a planului β cu planul α trece prin P și este paralelă cu d. Pe de altă parte, prin P putem construi la d o singură paralelă. Astfel putem formula o teoremă echivalentă cu *teorema* 2, utilă în aplicații.

Aceasta are următorul enunț:

Teorema 3

Dacă o dreaptă este paralelă cu un plan și printr-un punct al planului ducem o paralelă la dreapta dată, această paralelă este conținută în planul dat.

Problemă rezolvată

Fie $ABCD$, un tetraedru și punctele M, N, P situate respectiv pe muchiile AB, AC și AD, astfel încât $MN \parallel BC$ și $NP \parallel CD$ (vezi *Figura* 61).

a) Demonstrați că $MP \parallel (BCD)$.

b) Determinați intersecția planelor (MPC) și (BCD).

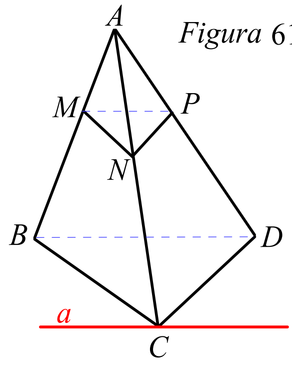


Figura 61

Soluție a) Conform teoremei lui *Thales*, din $MN \parallel BC$ rezultă $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$, iar din $NP \parallel CD$ rezultă $\frac{AN}{NC} = \frac{AP}{PD}$. Deducem că $\frac{AM}{MB} = \frac{AP}{PD}$, de unde conform reciprocei teoremei lui *Thales*, rezultă $MP \parallel BD$, deci $MP \parallel (BCD)$.

b) Cum planul (MPC) conține dreapta MP paralelă cu planul (BCD) și cele două plane au în comun punctul C, rezultă că intersecția lor este dreapta a care trece prin C și este paralelă cu MP, deci și cu BD.

PROBLEME

1 Dacă $ABCDA'B'C'D'$ este un cub, precizați pozițiile relative ale următoarelor perechi de drepte: a) BB' și DD'; b) AC' și DD'; c) AC și $A'C'$; d) BC și $A'D'$; e) AC și $D'B'$; f) BC' și AD'; g) AB și AD; h) AC și DB.

2 $VABC$ este un tetraedru.
a) Găsiți toate muchiile care sunt concurente cu VA;
b) Găsiți toate perechile de muchii necoplanare.

3 Se consideră prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, M este mijlocul lui AB și N este mijlocul lui AC. Precizați poziția relativă a următoarelor perechi de drepte: a) AA' și $B'C'$; b) AA' și CC'; c) AA' și MN; d) CC' și AB; e) CC' și MN; f) CC' și AC; g) $B'C'$ și MN.

4 Fie tetraedrul $ABCD$. Dacă M, N, P, Q sunt mijloacele segmentelorAB, BC, CD și respectiv AD, arătați că M, N, P, Q sunt puncte coplanare.

5 Se consideră $ABCDA'B'C'D'$ o prisma patrulateră regulată. Stabiliți:
a) pozițiile dreptei AB față de planele (DCD'), (DCA), $(DD'A')$, $(DD'B)$, $(A'B'A)$;
b) pozițiile dreptei AC față de planele (ADB), (DBD'), $(BB'C)$, (DCD'), (DBB'), $(A'B'D')$.

6 $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată de vârf V, O este centrul bazei, iar M este mijlocul muchiei VA. Arătați că: a) $MO \parallel (VDC)$; b) $MO \parallel (VBC)$; c) $VC \parallel (MBD)$.

7 Triunghiul ABC are latura BC conținută într-un plan α, iar punctul A nu aparține planului. Dacă M și N sunt puncte pe laturile AB și respectiv AC, astfel încât:
a) $AM = 2\text{ cm}$, $MB = 4\text{ cm}$, $AN = 3\text{ cm}$, $NC = 6\text{ cm}$, arătați că $MN \parallel \alpha$;
b) $AM = 2\text{ cm}$, $MB = 4\text{ cm}$, $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}$, arătați că MN intersectează planul α.

8 Se consideră paralelogramul $ABCD$ de centru O și M un punct exterior planului paralelogramului. Dacă N este mijlocul lui MA, arătați că:
a) $MC \parallel (NBD)$; b) $NO \parallel (BMC)$; c)$NO \nparallel (BMD)$.

9 În triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AB = 9\text{ cm}$, $BC = 15\text{ cm}$. Fie M pe segmentul AB, astfel încât $BM = 6\text{ cm}$ și N pe segmentul AC, astfel încât $MN = 5\text{ cm}$. Dacă $BC \subset \alpha$ și $A \not\in \alpha$, stabiliți poziția dreptei MN față de planul α.

10 $VABC$ este o piramidă triunghiulară regulată de vârf V. Dacă $BM \perp VA$, $M \in VA$, $BN \perp VC$, $N \in VC$, arătați că:
a) $MN \parallel (ABC)$; b) $AC \parallel (MNB)$.

11 Dacă $ABCDA'B'C'D'$ este o prismă patrulateră regulată, precizați poziția relativă a următoarelor perechi de drepte: a) AC' și CA; b) AC' și BC; c) AC' și $A'D$; d) $A'D$ și $B'C$; e) $A'D$ și BC'; f) AC și BD; g) AC și $D'B'$.

12 Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$, M este mijlocul lui VB și N este mijlocul lui VC.
a) Arătați că punctele A, D, M, N sunt coplanare.
b) Stabiliți poziția relativă a dreptelor AD și VB, AD și BC, AB și VA, VD și AC, AC și VA, MN și VB.

13 $ABCA'B'C'$ este o prismă triunghiulară regulată cu baza ABC. Stabiliți pozițiile dreptei AA' față de planele (ABC), (CBB'), (ABB'), (BCA').

14 În tetraedrul $ABCD$, punctele M, N, P, Q sunt mijloacele muchiilor AB, BC, CA și respectiv AD. Arătați că: a) $MN \parallel (ADC)$; b) $BC \parallel (MQP)$; c) $BD \parallel (MNQ)$.

15 În tetraedrul $VABC$, G_1 este centrul de greutate al feței VAB și G_2 este centrul de greutate al feței VAC. Arătați că $G_1G_2 \parallel (ABC)$.

16 Dacă $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată cu toate muchiile congruente și M aparține muchiei VA cu $OM \perp VA$, $\{O\} = AC \cap BD$, stabiliți poziția dreptei MP față de planele (VDC) și (VBC).

17 Fie $ABCD$ un tetraedru, E mijlocul muchiei AC, iar F proiecția ortogonală a vârfului A pe bisectoarea exterioară a unghiului ADB. Demonstrați că EF este paralelă cu planul (BCD).

18 În piramida triunghiulară $MATE$, de vârf M, cu $TA = TE$, se consideră: TB bisectoarea unghiului $\widehat{MTA}$ și TC bisectoarea unghiului $\widehat{MTE}$. Demonstrați că $BC \parallel (ATE)$.

19 Pătratele $ABCD$ și $CDEF$ au latura CD comună și sunt situate în plane diferite. Demonstrați că:
a) $AB \parallel (CDE)$;
b) $AE \parallel (BCF)$;
c) $BF \parallel (ACE)$.

20 Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$, O centrul feței $ABCD$ și O' centrul feței $A'B'C'D'$.
Demonstrați că:
a) $OO' \parallel (CDD')$; b) $AO' \parallel (BC'D)$.

21 Fie tetraedrul $ABCD$ și punctele M, E, F situate pe muchiile AB, AC, respectiv AD, astfel încât $ME \parallel BC$ și $\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AD}$.
Demonstrați că:
a) $ME \parallel (BCD)$; b) $CD \parallel (BEF)$.

22 Fie planul α și punctele M, P, Q, astfel încât $P, Q \in \alpha$ și $M \notin \alpha$. Știind că $E \in MP$, $ME = 2$ cm, $EP = 5$ cm, $F \in MQ$, $MF = 4$ cm, $FQ = x$ cm și $EF \parallel \alpha$, calculați x.

23 Fie $SABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu toate muchiile egale. Notăm cu O centrul bazei $ABCD$, M mijlocul muchiei SC și N mijlocul muchiei SD. Demonstrați că:
a) $OM \parallel (SAD)$; b) $MN \parallel (ABC)$;
c) $ON \parallel (SBA)$; d) $ON \parallel (SBM)$.

24 Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$, O_1 centrul feței $ABCD$, O_2 centrul feței $ADD'A'$.
Demonstrați că:
a) $O_1O_2 \parallel (C'D'D)$; b) $O_1O_2 \parallel (A'BC')$.

25 În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ se notează cu E mijlocul muchiei $C'D'$ și cu F centrul feței $ADD'A'$.
a) Stabiliți poziția dreptei BB' față de planul (ACC').
b) Stabiliți poziția dreptei EF față de planul (ABC').

26 Fie $ABCD$ un tetraedru regulat, R mijlocul muchiei AD, S mijlocul muchiei BD. Știind că RP este bisectoarea unghiului BRC, $P \in BC$, demonstrați că:
a) $RS \parallel (ABC)$; b) $CD \parallel (PRS)$.

27 Fie prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, O centrul feței $BCC'B'$, iar M mijlocul muchiei AB. Demonstrați că:
a) $OM \parallel (ACC')$; b) $AC' \parallel (OMC)$.

Lecția 8. Plane paralele

✓ Poziții relative a două plane

- Dacă două plane au în comun trei puncte necoliniare, atunci ele coincid (conform axiomei A_4). Spunem că planele sunt *confundate*, *identice* sau *coincidente* (vezi *Figura* 62).

Figura 62

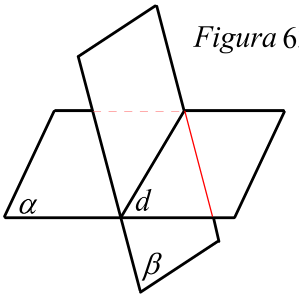


Figura 63

- Dacă două plane diferite au în comun un punct, atunci ele au o dreaptă comună. În acest caz spunem că planele sunt *secante* (vezi *Figura* 63).

$\alpha \cap \beta = d$ - *plane secante.*

Definiție

Două plane care nu au niciun punct comun se numesc *plane paralele*.

Exemplu Plafonul și podeaua unei camere sunt plane paralele.
În *Figura* 64 am reprezentat două plane paralele α și β.
Avem $\alpha \cap \beta = \varnothing$ și scriem $\alpha \parallel \beta$.

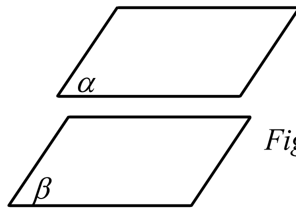


Figura 64

✓ Teoreme de paralelism; proprietăți

Următoarea teoremă demonstrează existența planelor paralele.

Teorema 1

Dacă printr-un punct exterior unui plan se duc două drepte paralele cu două drepte concurente conținute în acel plan, aceste drepte determină un plan paralel cu planul dat.

Ipoteză	Concluzie
$a \cap b = \{O\}$ $a \parallel \beta$ $b \parallel \beta$	$(a, b) \parallel \beta$

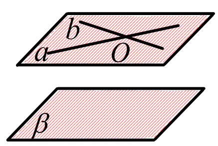


Figura 65

Demonstrație Presupunem că planul (a, b) nu este paralel cu planul β. Aceste plane nu coincid, pentru că planul (a, b) conține dreapta a, în timp ce planul β nu o conține. Deci planele (a, b) și β sunt secante; fie d, dreapta lor comună. Dreapta d poate fi paralelă cel mult cu una din dreptele a sau b (altfel, prin punctul O ar trece două drepte paralele cu d, ceea ce este absurd). Deci d intersectează cel puțin una din dreptele a sau b. Dacă d intersectează dreapta a în A, atunci punctul A aparține în același timp dreptei a și planului β, ceea ce contrazice ipoteza. Analog se ajunge la contradicție dacă presupunem că dreapta d intersectează dreapta b. Contradicția obținută dovedește că $(a, b) \parallel \beta$ (vezi *Figura* 65).

Temă pentru lucru în echipe Arătați că planele bazelor unei prisme triunghiulare drepte sunt paralele. Raționamentul este analog pentru o prismă dreaptă care are ca bază un poligon oarecare.

Reține!

Planele bazelor unei prisme drepte sunt paralele.

Din teorema 1, deducem modalitatea de construcție a unui plan care trece printr-un punct dat și este paralel cu un plan dat. Se poate demonstra că acest plan este unic. Deci are loc:

***Proprietatea* 1**. Printr-un punct exterior unui plan se poate duce un singur plan paralel cu planul dat.

În cele ce urmează, enunțăm alte câteva proprietăți de paralelism, utile în rezolvarea problemelor.

***Proprietatea* 2**. Dacă două plane sunt paralele, atunci orice dreaptă dintr-un plan este paralelă cu celălalt plan (vezi *Figura* 66).

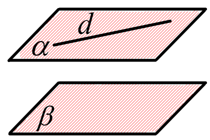


Figura 66

***Proprietatea* 3**. Intersecțiile a două plane paralele cu un al treilea plan, sunt două drepte paralele (vezi *Figura* 67).

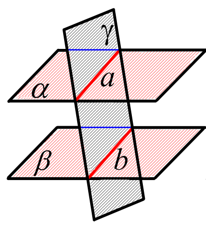


Figura 67

***Proprietatea* 4**. Două plane distincte, paralele cu un al treilea plan sunt paralele între ele (vezi *Figura* 68).

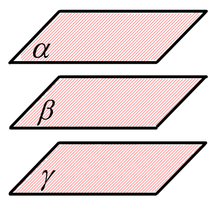


Figura 68

Temă pentru lucru în echipe

Căutați exemple din realitatea înconjurătoare care să constituie modele pentru aceste proprietăți. Folosind notațiile din figurile corespunzătoare, exprimați enunțul fiecăreia dintre proprietățile 2-4 în limbaj matematic, scriind ipoteza și concluzia. Folosind metoda reducerii la absurd, demonstrați proprietățile 2,3 și 4.

Teorema 2

Două plane paralele care intersectează două drepte paralele determină pe acestea segmente congruente.

Ipoteză	Concluzie
$\alpha \parallel \beta$ $d_1 \parallel d_2$ $d_1 \cap \alpha = \{A\}$, $d_1 \cap \beta = \{B\}$ $d_2 \cap \alpha = \{C\}$, $d_2 \cap \beta = \{D\}$	$AB \equiv CD$

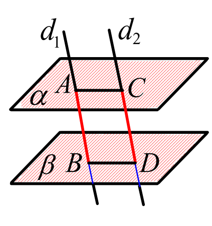


Figura 69

Demonstrație Planul (d_1, d_2) intersectează planele α și β după dreptele paralele AC și BD. Deoarece din ipoteză avem și $AB \parallel CD$, rezultă că $ABCD$ este paralelogram, deci $AB \equiv CD$.

Problemă rezolvată

Demonstrați că trei plane paralele determină pe două secante segmente proporționale.

Soluție Considerăm trei plane paralele α, β, γ și dreptele *a, b* care le intersectează în punctele *A, B, C,* respectiv A', B', C' (vezi *Figura* 70). Prin punctul *A*, ducem dreapta *c* paralelă cu *b* care intersectează planele β și γ în punctele B'' și C''. Planul (a, c) intersectează planele β și γ după dreptele paralele BB'' și CC''.
Din *teorema lui Thales*, avem $\frac{AB}{AB''} = \frac{BC}{B''C''}$. Cum $AB'' = A'B'$ și $B''C'' = B'C'$, rezultă $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$.

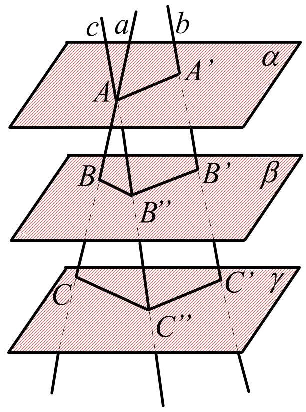


Figura 70

Proprietatea pe care am demonstrat-o în problema de mai sus este cunoscută sub numele de *teorema lui Thales în spațiu.*

PROBLEME

1 Închipuiți-vă cele 6 plane ce formează clasa în care învățați (cei 4 pereți, tavanul și podeaua).
a) Precizați toate perechile de plane paralele.
b) Precizați toate planele care sunt secante cu planul tavanului.

2 $ABCA'B'C'$ este o prismă triunghiulară regulată cu baza ABC. Arătați că $(ABC) \parallel (A'B'C')$.

3 Fie $ABCD$ o piramidă triunghiulară regulată cu baza ABC. A', B', C' sunt mijloacele muchiilor laterale DA, DB și DC.
Arătați că $(A'B'C') \parallel (ABC)$.

4 $ABCA'B'C'$ este o prismă triunghiulară regulată, iar M, N, P sunt mijloacele laturilor $A'C'$, AA' și respectiv BB'.
a) Arătați că $(MNP) \parallel (C'AB)$.
b) Dacă $\{Q\} = (MNP) \cap C'B'$, arătați că Q este mijlocul lui $C'B'$.

5 $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată cu baza $ABCD$. Punctele $M \in VA$, $N \in VB$, $P \in VC$, astfel încât $\frac{VM}{MA} = \frac{3}{4}$, $\frac{VN}{VB} = \frac{3}{7}$ și $\frac{VC}{PC} = \frac{7}{4}$.
a) Arătați că $(MNP) \parallel (DCB)$.
b) Dacă $\{Q\} = (MNP) \cap VD$ și $AB = 70\,\text{cm}$, calculați $\mathcal{A}_{MNPQ}$.

6 $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ este o prismă hexagonală. Arătați că:
a) $(BCB') \parallel (FEE')$;
b) $(BDD') \parallel (AEE')$; c) $(ADD') \parallel (BCC')$.

7 Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:
a) $(ABC) \parallel (A'B'D')$;
b) $(ABC) \cap (ADD') = AA'$;
c) $(ABC) \cap (ADD') = AD$;
d) $(ABB') = (A'B'A)$;
e) $(ACC') \cap (A'B'C') = A'C'$;
f) $(ADD') \parallel (B'C'C)$;
g) $(BD'D) = (BB'C)$.

8 Paralelogramul $ABCD$ și triunghiul ADE sunt situate în plane diferite. Dacă notăm cu M și N mijloacele laturilor AE și DE, iar O este centrul paralelogramului, arătați că $(MNO) \parallel (BEC)$.

9 Fie $ABCD$ un tetraedru regulat și $M \in AD$, $N \in BD$ și $P \in CD$, astfel încât $\frac{MA}{MD} = \frac{1}{2}$, $\frac{NB}{BD} = \frac{1}{3}$ și $\frac{PD}{DC} = \frac{2}{3}$.
a) Arătați că $(MNP) \parallel (ABC)$.
b) Dacă $AB = 10\,\text{cm}$, aflați aria triunghiului MNP.

TEST DE AUTOEVALUARE

Recomandat pentru portofoliu personal

10p din oficiu

SUBIECTUL I - Pe foaia de rezolvare scrieți numai rezultatele. (30 de puncte)

5p 1. Dacă dreapta d este paralelă cu planul α, atunci $d \cap \alpha = \ldots$

5p 2. Dacă $MNPQRS$ este o prismă triunghiulară regulată, atunci dreapta MQ și planul (NPR) sunt . . .

5p 3. În cubul $ALGEBRIC$, planele (ALG) și (BRI) sunt . . .

5p 4. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA_1B_1C_1D_1$, o pereche de drepte paralele este formată din dreptele . . . și . . .

5p 5. Valoarea de adevăr a propoziției: *„Dacă o dreaptă este paralelă cu un plan, atunci ea este paralelă cu orice dreaptă din acest plan"* este . . .

5p 6. Dacă $d_1 \parallel d_2$ și $d_2 \parallel d_3$, atunci . . . sau . . .

SUBIECTUL al II-lea - Precizați litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

5p 1. Triunghiul ABC are latura AB inclusă în planul α și $C \notin \alpha$. Dacă M se află pe latura AC, $\frac{AM}{MC} = 3$, N se află pe latura BC, $\frac{CN}{NB} = x$ și $MN \parallel \alpha$, atunci valoarea lui x este:

A. 3 **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 4

5p 2. Dacă $ABCD$ este un tetraedru regulat, E mijlocul muchiei AB, F mijlocul muchiei AC, atunci unghiul dintre dreptele EF și CD are măsura de:

A. 90° **B.** 45° **C.** 30° **D.** 60°

5p 3. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ unghiul dintre dreptele AD și BC' are măsura de:

A. 45° **B.** 90° **C.** 60° **D.** 30°

5p 4. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare și punctele M, N, P situate pe muchiile AD, BD respectiv CD astfel încât: $\frac{AM}{MD} = 0,(3)$, $\frac{BN}{BD} = 0,25$ și $\frac{DP}{PC} = 3$. Atunci planele (ABC) și (MNP):

A. coincid **B.** sunt paralele **C.** au o dreaptă comună **D.** au un punct comun

5p 5. Dacă $ABCD$ și $CDEF$ sunt două paralelograme situate în plane diferite, atunci dreptele AB și EF:

A. coincid **B.** sunt paralele **C.** sunt necoplanare **D.** sunt concurente

5p 6. Piramida patrulateră regulată $SPION$ cu vârful S are toate muchiile congruente. Unghiul dintre dreptele SO și IP are măsura de:

A. 60° **B.** 30° **C.** 45° **D.** 90°

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de rezolvare scrieți rezolvările complete. (30 de puncte)

În piramida triunghiulară regulată $VABC$, cu vârful V, notăm cu G_1 centrul de greutate al triunghiului VAB și cu G_2 centrul de greutate al triunghiului VBC.

10p a) Demonstrați că $G_1G_2 \parallel (ABC)$.

10p b) Știind că $G_1G_2 = 12$ cm, calculați perimetrul triunghiului ABC.

10p c) Știind că $AB = VA = 36$ cm, calculați sinusul unghiului dintre dreptele AG_1 și CG_2.

Lecția 9. Aplicații: secțiuni paralele cu baza în corpuri geometrice studiate

✓ Secțiuni paralele cu baza în prismă

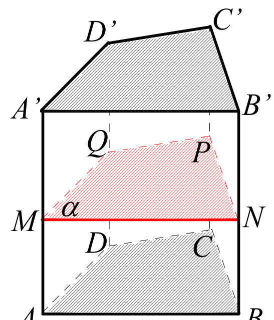


Figura 71

Fie o prismă patrulateră dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ și un plan α paralel cu bazele care intersectează muchiile laterale AA', BB', CC' și DD', respectiv în M, N, P, Q. Spunem că patrulaterul $MNPQ$ reprezintă secțiunea determinată în prismă de planul α. (Vezi *Figura* 71)

Planul $ABB'A'$ intersectează planele paralele α și (ABC) după dreptele paralele MN și AB. Cum avem și $AM \parallel BN$, patrulaterul $ABMN$ este paralelogram, deci $AB \equiv MN$. La fel se arată că celelalte laturi ale patrulaterului $MNPQ$ sunt congruente și paralelele cu laturile patrulaterului $ABCD$. Patrulaterele $ABCD$ și $MNPQ$ au unghiurile respectiv congruente, ca unghiuri cu laturile respectiv paralele. Raționamentul rămâne valabil dacă în locul unei prisme patrulatere drepte considerăm o prismă dreaptă, având ca bază un poligon oarecare.

Spunem că două poligoane sunt congruente dacă au laturile respectiv congruente și unghiurile corespunzătoare congruente.

Reține!

O secțiune paralelă cu baza unei prisme este un poligon congruent cu poligonul bazei.

✓ Secțiuni paralele cu baza în piramidă

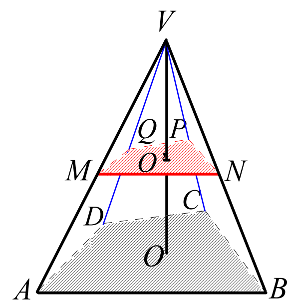


Figura 72

Considerăm o piramidă patrulateră $VABCD$ și un plan α paralel cu planul (ABC) care intersectează muchiile laterale VA, VB, VC, VD respectiv în M, N, P și Q. Spunem că patrulaterul $MNPQ$ reprezintă secțiunea determinată în piramidă de planul α. (Vezi *Figura* 72)

Planul (VAB) intersectează planele paralele α și (ABC) după dreptele paralele MN și AB. Din teorema fundamentală a asemănării, avem $\Delta VMN \sim \Delta VAB$, de unde $\frac{MN}{AB} = \frac{VM}{VA}$.

Analog din $MQ \parallel AD$ obținem $\frac{VM}{VA} = \frac{MQ}{AD} = \frac{VQ}{VD}$. Din $QP \parallel DC$ și $PN \parallel CB$ avem în final $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PQ}{CD} = \frac{QM}{AD}$.

În plus, unghiurile patrulaterului $MNPQ$ sunt congruente cu ale patrulaterului $ABCD$, ca unghiuri cu laturile respectiv paralele.

Raționamentul rămâne valabil dacă, în locul unei piramide patrulatere, considerăm o piramidă având ca bază un poligon oarecare.

Reține!

O secțiune paralelă cu baza unei piramide este un poligon asemenea cu poligonul bazei.

✓ Trunchiul de piramidă

Un plan care intersectează muchiile unei piramide și este paralel cu baza acesteia o împarte în două poliedre. Unul dintre poliedre este piramida care are vârful comun cu piramida dată și ca bază poligonul de secțiune. Celălalt corp va fi numit în continuare *trunchi de piramidă.* Astfel, în *Figura* 73 $ABCMNP$ este un trunchi de piramidă. Poligoanele ABC și MNP reprezintă bazele trunchiului de piramidă (ABC este baza mare, MNP este baza mică), iar $ABNM$, $BCPN$, și $ACPM$ sunt fețele laterale ale trunchiului de piramidă.

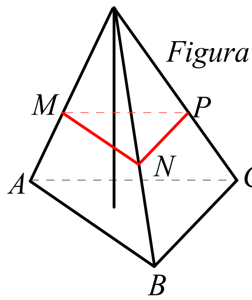
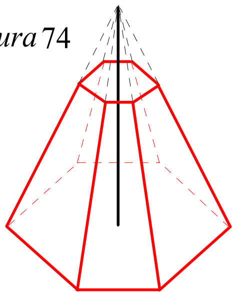


Figura 73

Figura 74


Bazele trunchiului de piramidă sunt două poligoane asemenea situate în plane paralele, iar fețele laterale ale trunchiului de piramidă sunt trapeze.

Denumirea trunchiului de piramidă este dată de numărul laturilor poligoanelor bazei. Astfel, vorbim de trunchi de piramidă triunghiulară, patrulateră etc.

Un trunchi de piramidă care provine dintr-o piramidă regulată se numește trunchi de piramidă regulată.

Astfel în *Figura* 74 am reprezentat un trunchi de piramidă hexagonală regulată.

Problemă rezolvată

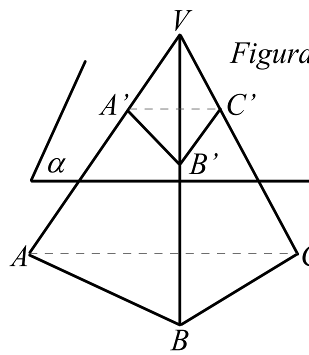


Figura 75

Piramida $VABC$ triunghiulară regulată cu latura bazei egală cu 2 cm se secționează cu un plan α paralel cu baza ABC ce trece prin mijlocul muchiei laterale VA după un triunghi $A'B'C'$. Aflați perimetrul triunghiului $A'B'C'$ (vezi *Figura* 75).

<u>Soluție</u> Din asemănare avem $\frac{VA'}{VA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{2} = \frac{A'B'}{2}$, rezultă $A'B' = 1$ cm, de unde $\mathcal{P}_{A'B'C'} = 3$ cm.

✓ Trunchiul de con

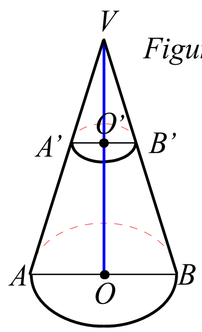


Figura 76

Un plan care intersectează un con circular drept și este paralel cu baza acestuia împarte conul în două corpuri: un con circular drept care are vârful comun cu conul inițial și ca bază discul de secțiune și celălalt corp care va fi numit în continuare *trunchi de con*. Astfel în *Figura* 76 $ABB'A'$ este un trunchi de con, iar conurile VAB și $VA'B'$ se numesc conuri asemenea.

Problemă rezolvată

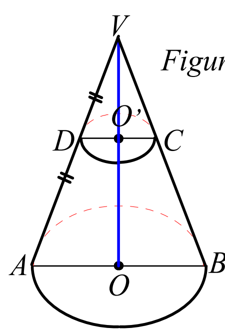


Figura 77

Secționăm un con circular drept din lemn printr-o tăietură paralelă cu baza, dusă prin mijlocul unei generatoare. Știind că aria discului de secțiune este egală cu 64π cm^2, calculați lungimea discului de cerc care reprezintă baza conului inițial. (Vezi *Figura* 77.)

<u>Soluție</u> Fie R raza bazei conului și R' raza secțiunii. Din ipoteză $\pi R'^2 = 64\pi$ deci $R' = 8$ cm. Din asemănare $\frac{R'}{R} = \frac{1}{2}$, de unde $R = 16$ cm.

Lungimea discului de cerc care reprezintă baza conului este $2\pi R = 32\pi$ cm.

PROBLEME

1 $ABCDA'B'C'D'$ este o prismă patrulateră regulată cu baza $ABCD$, $AB = 2\sqrt{2}$ cm și M este mijlocul lui AA'. Un plan α ce trece prin M și este paralel cu $ABCD$ secționează prisma.

a) Desenați secțiunea pe care o face α în prismă.

b) Aflați aria și perimetrul poligonului de secțiune.

2 Piramida $VABC$ se secționează cu un plan α paralel cu baza ABC, obținându-se ca secțiune triunghiul MNP cu $\mathcal{P}_{MNP} = \frac{P_{ABC}}{2}$.

a) Desenați secțiunea MNP.

b) Arătați că α trece prin mijlocul muchiei laterale.

3 $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată cu latura bazei egală cu $10\sqrt{2}$ cm. Punctul $M \in VA$ astfel încât $VM = \frac{1}{4}VA$. Un plan α ce trece prin M intersectează piramida după patrulaterul $MNPQ$. Calculați aria și perimetrul patrulaterului $MNPQ$.

4 Desenați:

a) un trunchi de piramidă triunghiulară regulată în care latura bazei mici reprezintă jumătate din latura bazei mari;

b) un trunchi de piramidă patrulateră regulată în care latura bazei mici reprezintă $\frac{2}{3}$ din latura bazei mari.

5 $ABCA'B'C'$ este o prismă triunghiulară dreaptă, M un punct pe segmentul AA' astfel încât $\frac{MA'}{AA'} = \frac{2}{5}$. Un plan α ce trece prin M și este paralel cu (ABC) intersectează prisma după triunghiul MNP, N aparține muchiei BB' și P aparține muchiei CC'.

a) Desenați intersecția lui α cu prisma.

b) Calculați valoarea rapoartelor $\frac{NB'}{NB}$ și $\frac{PC}{CC'}$.

6 $VABC$ este o piramidă triunghiulară regulată cu vârful V. Piramida se secționează cu un plan α paralel cu (ABC) dus prin mijlocul muchiei VA. Se obține ca secțiune un triunghi cu perimetrul egal cu 12 cm.

a) Desenați secțiunea în piramidă.

b) Aflați aria bazei piramidei.

7 Fie $VABC$ o piramidă cu vârful V. Secționăm piramida cu un plan paralel cu (ABC), dus prin punctul A' situat pe muchia VA, care intersectează muchiile VB, VC în punctele B', respectiv C'. Știind că raportul ariilor triunghiurilor $A'B'C'$ și ABC este egal cu $\frac{1}{9}$ și $AB = 24$ cm, calculați $A'B'$.

8 Tetraedrul regulat $ABCD$ se secționează cu planul (MNP), paralel cu planul (BCD), $M \in AB$, $N \in AC$, $P \in AD$. Știind că $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{4}$, calculați raportul dintre aria triunghiului MNP și aria triunghiului BCD.

9 Un con circular drept cu $R = 10$ cm este secționat cu un plan paralel cu baza, care trece prin mijlocul unei generatoare. Calculați aria secțiunii.

Lecția 10. Perpendicularitate: drepte perpendiculare, dreaptă perpendiculară pe un plan

Din clasele anterioare știm că în plan două drepte sunt perpendiculare dacă unghiul celor două drepte este un unghi drept. Această definiție se extinde în mod firesc și pentru două drepte în spațiu.

Definiție

Dacă a și b sunt două drepte din spațiu, spunem că dreapta *a* este perpendiculară pe dreapta *b* dacă unghiul acestor drepte este drept.

Exemplu Dacă $ABCDA'B'C'D'$ este un cub, atunci $A'B' \perp AD$ pentru că $\widehat{A'B', AD} = \sphericalangle DAB = 90^\circ$ (vezi *Figura* 78).

Analog $C'D' \perp BC$, $B'C' \perp AB$ etc.

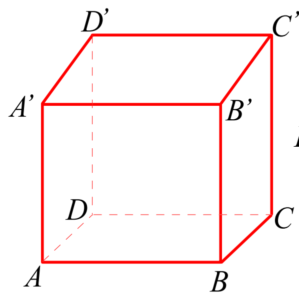


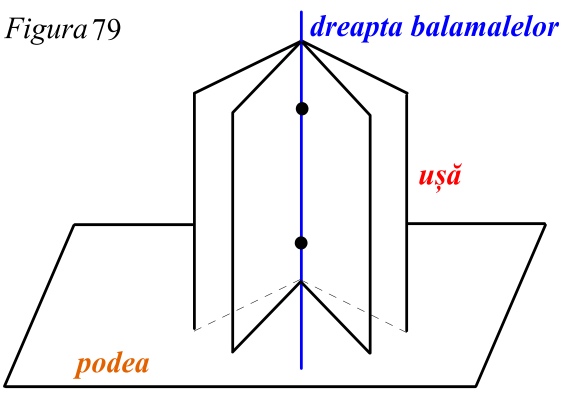
Figura 78

✓ Dreapta perpendiculară pe un plan

O ușă are forma unui dreptunghi, latura inferioară este perpendiculară pe dreapta determinată de balamale. Pentru orice poziție a ușii, dreapta balamalelor este perpendiculară pe marginea de jos a ușii (vezi *Figura* 79).

Acest exemplu arată existența unei drepte perpendiculare pe toate dreptele conținute într-un plan. Spunem că dreapta determinată de balamalele ușii este perpendiculară pe planul podelei.

Figura 79



Definiție

O dreaptă este perpendiculară pe un plan dacă este perpendiculară pe toate dreptele conținute în acel plan.

Observații.

1. Dacă o dreaptă este perpendiculară pe un plan, atunci ea *„înțeapă”* planul.
2. Dacă o dreaptă este perpendiculară pe un plan, atunci orice dreaptă paralelă cu dreapta dată este perpendiculară pe plan.

Conform definiției, pentru a demonstra că o dreaptă este perpendiculară pe un plan, ar trebui să dovedim că ea este perpendiculară pe *toate* dreptele planului. Vom demonstra însă o teoremă care furnizează o metodă mai simplă prin care putem stabili faptul că o dreaptă este perpendiculară pe un plan.

Teoremă (Criteriul de perpendicularitate)

O dreaptă este perpendiculară pe un plan dacă și numai dacă este perpendiculară pe două drepte concurente conținute în acel plan.

- *Suficiența*:

Ipoteză	Concluzie
$d \perp a$ $d \perp b$ a și b sunt concurente $a \subset \beta$ $b \subset \beta$	$d \perp \beta$

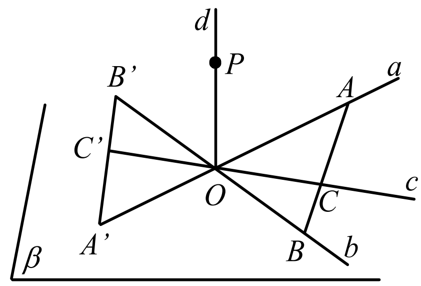


Figura 80

Demonstrație Fie O, intersecția dreptei d cu planul β. Trebuie să demonstrăm că dreapta d este perpendiculară pe orice dreaptă c din planul β. Dacă dreapta c este paralelă cu una dintre dreptele a sau b, atunci afirmația este evidentă.

Putem presupune că dreptele a, b, c trec prin punctul O (în caz contrar, considerăm paralele la aceste drepte, care să treacă prin O).

Fie punctul $P \in d$ și punctele $A \in a$ și $B \in b$, astfel încât dreapta c să intersecteze segmentul AB. Notăm cu C punctul de intersecție. Notăm cu A' și B' simetricele punctelor A și B față de O. Rezultă că $ABA'B'$ este paralelogram, iar O este centrul său de simetrie. Înseamnă că simetricul C' al lui C față de O aparține segmentului $A'B'$; segmentele AC și $A'C'$, fiind simetrice față de O, sunt congruente.

Cum dreapta d este mediatoarea segmentului AA', avem $PA \equiv PA'$. Analog, $PB \equiv PB'$. Deoarece avem și $AB \equiv A'B'$ (laturi opuse în paralelogram), deducem că $\Delta PAB \equiv \Delta PA'B'$ (L.L.L.).

În consecință $\sphericalangle PAC \equiv \sphericalangle PA'C'$ și, de aici, $\Delta PAC \equiv \Delta PA'C'$ (L.U.L.). Rezultă că $PC \equiv PC'$. În triunghiul isoscel PCC', PO este mediană, deci este și înălțime, adică $d \perp c$.

Cum dreapta c este oarecare, rezultă că $d \perp \beta$.

- *Necesitatea*:

În mod evident dacă o dreaptă este perpendiculară pe un plan, deci pe toate dreptele conținute în plan, este perpendiculară pe orice două drepte concurente din plan.

Aplicații

1. Fie $ABCA'B'C'$, o prismă triunghiulară dreaptă. $ABB'A'$ și $ACC'A'$ sunt dreptunghiuri, deci AA' este perpendiculară pe dreptele concurente AB și AC. De aici rezultă că $AA' \perp (ABC)$ (vezi *Figura* 81).

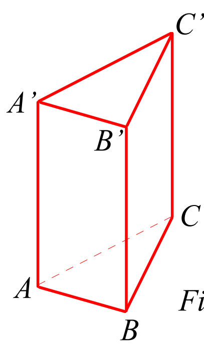


Figura 81

Raționamentul de mai sus se poate aplica pentru muchiile laterale ale oricărei prisme drepte.

Reține!

Muchiile laterale ale unei prisme drepte sunt perpendiculare pe planul bazei.

2. Considerăm un paralelipiped dreptunghic *ABCDA'B'C'D'* cu dimensiunile $a = AB$, $b = BC$ și $c = AA'$ (vezi *Figura* 82). Ne propunem să calculăm lungimea *d* a diagonalei *AC'*.

Cum $CC' \perp (ABCD)$, rezultă $CC' \perp AC$, deci $AC'^2 = AC^2 + CC'^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Rezultă $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

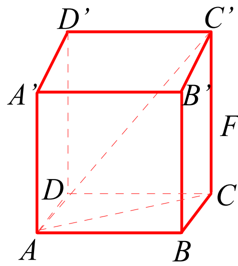


Figura 82

Reține!

Diagonala paralelipipedului dreptunghic de dimensiuni a, b, c este:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Putem enunța alte două proprietăți utile în legătură cu noțiunea de dreaptă perpendiculară pe un plan.

***Proprietatea* 1**. Dacă o dreaptă este perpendiculară pe un plan, atunci este perpendiculară pe orice plan paralel cu acesta. (Vezi *Figura* 83.)

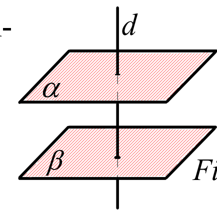


Figura 83

***Proprietatea* 2**. a) Două plane perpendiculare pe aceeași dreaptă sunt paralele. (Vezi *Figura* 83.)

b) Două drepte perpendiculare pe același plan sunt paralele. (Vezi *Figura* 84.)

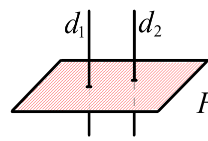


Figura 84

PROBLEME

1 În paralelipipedul dreptunghic *ABCDA'B'C'D'*, indicați pe ce fețe este perpendiculară dreapta:
a) *BB'*; b) *A'B*; c) *A'B'*.

2 Se consideră prisma *ABCDA'B'C'D'*, având ca bază pătratul *ABCD*. Arătați că:
a) $AA' \perp (ABC)$; b) $BC \perp (DCD')$;
c) $AD \perp (DCD')$; d) $BD \perp (ACC')$; e) $AC \perp (DBB')$.

3 Se consideră perpendiculara *AD* pe planul triunghiului dreptunghic *ABC* cu $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm, $\sphericalangle BAC = 90^\circ$. Dacă $AD = 6$ cm, calculați *BD*, *DC* și *DM*, unde *M* este mijlocul lui *BC*.

4 Dreptunghiul *ABCD* are $AB = 16$ cm și $AD = 15$ cm. Dacă $AM \perp (ABC)$, $AM = 5$ cm, calculați *MB*, *MC*, *MD*.

5 *ABCD* este un romb cu $AB = 18$ cm și $\sphericalangle B = 120^\circ$. Dacă $AM \perp (ABC)$, $AM = 6\sqrt{2}$ cm, calculați *MB*, *MC*, *MD*.

6 În prisma triunghiulară regulată *ABCA'B'C'*, *M* este mijlocul lui *BC*, $AB = 4$ cm și $AA' = 2\sqrt{3}$ cm. Calculați *A'M*.

7 Pe planul hexagonului regulat *ABCDEF* cu lungimea laturii egală cu 6 cm se ridică perpendiculara *AM*, astfel încât $AM = 6$ cm. Calculați *MB*, *MC*, *MD*, *MP* unde $\{P\} = FD \cap CE$.

8 Se consideră cubul *ABCDA'B'C'D'*. Dacă *O* este centrul feței *ADD'A'*, *M* este mijlocul laturii *BC* și $AB = 6$ cm, calculați *A'C*, *A'M*, *OM*, *OC'*.

9 Pe planul triunghiului dreptunghic isoscel *ABC* cu ipotenuza *BC*, de lungime $4\sqrt{2}$ cm, se ridică perpendiculara *AM*. Dacă $MB = 6$ cm, calculați *AM*.

10 Pentru ca o dreaptă să fie perpendiculară pe un plan este suficient să fie perpendiculară pe două drepte din plan? *Argumentați răspunsul*!

Lecția 11. Distanța de la un punct la un plan

Definiție

- Dacă un punct A este situat într-un plan α, distanța de la A la α este zero.
- Dacă punctul A este exterior planului α, spunem că distanța de la A la α este AA', unde $AA' \perp \alpha$ și $A' \in \alpha$.

Notăm $d(A, \alpha) = AA'$ și citim *distanța de la punctul A la planul α este AA'* (vezi *Figura* 85).

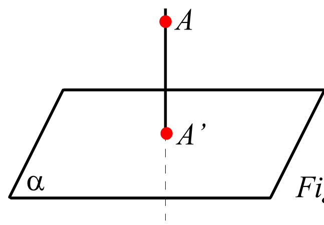


Figura 85

Observație
Definiția precedentă pune problema unicității segmentului AA' perpendicular pe α $(A' \in \alpha)$.

Teoremă

Perpendiculara dusă dintr-un punct exterior unui plan pe acel plan este unică.

Demonstrație Dacă, prin absurd, am presupune că din $A \notin \alpha$ se pot construi două perpendiculare diferite AA' și AA'' pe α, atunci am avem $AA' \perp A'A''$ și $AA'' \perp A''A'$, deci măsura unghiurilor triunghiului $AA'A''$ ar fi mai mare decât $180°$, *fals*; prin urmare, se poate construi o singură perpendiculară dintr-un punct exterior unui plan pe acel plan (vezi *Figura* 86).

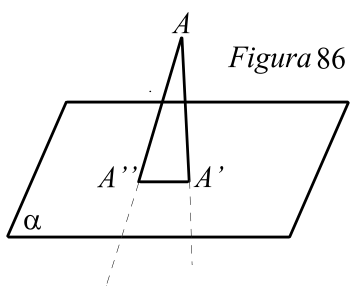


Figura 86

Observație Distanța de la A la α reprezintă lungimea celui mai mic segment cu un capăt în A și celălalt capăt în α. Într-adevăr, oricare ar fi $M \in \alpha$, $M \neq A'$, unde $A' \in \alpha$ și $AA' \perp \alpha$, avem $AM > AA'$ (în triunghiul dreptunghic $AA'M$ ipotenuza este mai mare decât cateta AA'). Spunem că AM este oblică și că oblica este mai mare decât perpendiculara. (Vezi *Figura* 87.)

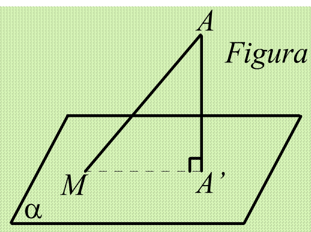


Figura 87

✓ Înălțimea unei piramide

Prin înălțimea unei piramide înțelegem segmentul ce are ca lungime distanța dintre vârful piramidei și planul bazei. Astfel, pentru piramida patrulateră $VABCD$, înălțimea este segmentul VV', unde $VV' \perp (ABCD)$, $V' \in (ABCD)$.
(Vezi *Figura* 88.)

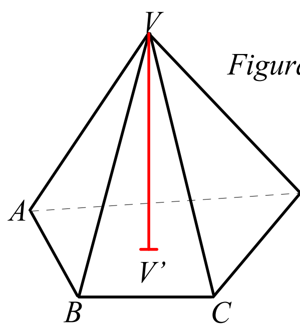


Figura 88

Observație

În cazul unui tetraedru, deoarece oricare dintre cele patru fețe ale sale poate fi considerată bază, există 4 înălțimi.

Problemă rezolvată

Fie $SABC$ o piramidă triunghiulară, având ca bază triunghiul echilateral ABC.

Demonstrați că $SA = SB = SC$, dacă și numai dacă piciorul perpendicularei din S pe planul (ABC) este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

Soluție Fie $SO \perp (ABC)$, $O \in (ABC)$. Rezultă că SO este perpendiculara pe OA, OB și OC, deci triunghiurile SOA, SOB și SOC sunt dreptunghice în O (vezi *Figura* 89).

Dacă $SA = SB = SC$, atunci triunghiurile SOA, SOB și SOC sunt congruente (conform cazului I.C.), de unde rezultă $OA = OB = OC$, adică O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

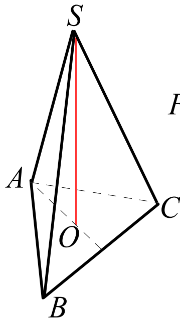


Figura 89

Reciproc, dacă O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, avem $OA = OB = OC$, de unde rezultă că triunghiurile SOA, SOB și SOC sunt congruente (conform cazului C.C.), de unde rezultă $SA = SB = SC$.

Un raționament asemănător se poate face pentru cazul când baza piramidei este un poligon regulat cu n laturi $(n \geq 3)$. De aici deducem un mod de a caracteriza piramidele regulate.

Reține!

O piramidă este regulată dacă și numai dacă baza este un poligon regulat, iar înălțimea *„cade”* în centrul cercului circumscris poligonului.

✓ Înălțimea unui con circular drept

Prin înălțimea unui con circular drept înțelegem segmentul determinat de vârful conului și centrul bazei conului. În figura alăturată, înălțimea conului circular drept este VO, unde O este centrul bazei. (Vezi *Figura* 90.)

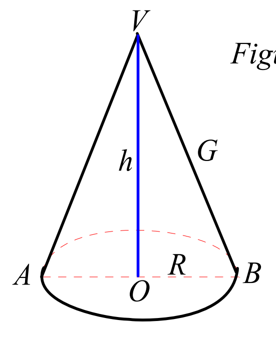


Figura 90

Observație

Dacă R, h, G reprezintă raza, înălțimea, respectiv generatoarea unui con circular drept, are loc relația: $G^2 = R^2 + h^2$.

PROBLEME

1 $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată cu vârful V, $VA = 25\,\text{cm}$, $AB = 10\sqrt{2}\,\text{cm}$ și înălțimea VO. Calculați VO.

2 Piramida triunghiulară regulată are latura bazei de lungime 5 cm și muchia laterală de lungime 8 cm. Calculați lungimea înălțimii piramidei.

3 $VABC$ este o piramidă triunghiulară regulată cu baza ABC și înălțimea VO. Dacă $VO = 6\,\text{cm}$, $AB = 6\,\text{cm}$ și M este mijlocul lui BC, calculați VA și VM.

4 Se consideră prisma dreaptă $ABCDA'B'C'D'$, având ca bază pătratul $ABCD$.
Știind că $AB = 4\,\text{cm}$ și $AA' = 6\,\text{cm}$, calculați:
a) Distanța de la punctul A la planul $(B'C'D')$.
b) Distanța de la punctul B la planul (CDD').
c) Distanța de la punctul A la planul (BDD').

5 Pe planul pătratului $ABCD$ de latură 10 cm, se ridică perpendiculara PA, $PA = 8\,\text{cm}$.
Calculați:
a) Distanța de la punctul C la planul (PAD).
b) Distanța de la punctul B la planul (PAC).

6 Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are muchia laterală $VA = 10\,\text{cm}$ și muchia bazei $AB = 5\sqrt{2}$ cm.
a) Demonstrați că triunghiul VAC este echilateral.
b) Calculați aria triunghiului VAC.

7 Fie triunghiul echilateral ABC cu lungimea laturii egală cu 12 cm și un punct M exterior planului (ABC), astfel încât $MA = MB = MC$ și $d(M,(ABC)) = 4\,\text{cm}$. Calculați MA.

8 Un con circular drept are raza, înălțimea și generatoarea egale cu $x+1, 2x+5$, respectiv $3x$, $x > 0$. Aflați x.

9 Raza, înălțimea și generatoarea unui con circular drept sunt exprimate prin trei numere naturale consecutive.
Aflați lungimea generatoarei conului.

10 Într-un con circular drept raza și înălțimea au aceeași lungime. Aflați lungimea generatoarei conului, știind că aria bazei conului este egală cu $289\pi\,\text{cm}^2$.

11 O piramidă patrulateră regulată are înălțimea de 5 cm și latura bazei de lungime $4\sqrt{2}$ cm. Aflați lungimea muchiei laterale a piramidei.

12 O piramidă patrulateră regulată are raza cercului circumscris bazei de $6\sqrt{2}$ cm și suma lungimilor muchiilor laterale egală cu 48 cm. Calculați lungimea înălțimii piramidei.

13 Fie triunghiul echilateral ABC cu lungimea laturii egală cu 18 cm și un punct P exterior planului (ABC), astfel încât $PA = PB = PC = 12\,\text{cm}$.
Calculați distanța de la punctul P la planul (ABC).

14 Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu vârful V, $VA \perp VC$ și $VA = 16\,\text{cm}$.
a) Calculați distanța de la punctul A la planul (VBD).
b) Calculați lungimea înălțimii piramidei.

15 Fie M un punct exterior pătratului $ABCD$ cu $AB = 12\,\text{cm}$. Știind că $MA = MB = MC = MD = 9\,\text{cm}$, calculați distanța de la punctul M la planul (ABC).

16 Fie trapezul dreptunghic $ABCD$, $AB \parallel CD$, $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$, $AD = DC = 6\,\text{cm}$. Pe planul trapezului construim perpendiculara PA. Calculați:
a) Distanța de la punctul B la planul (PAD).
b) Distanța de la punctul C la planul (PAD).

17 Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub de muchie 8 cm.
Calculați:
a) Distanța de la punctul A la planul (BDD').
b) Distanța de la punctul C' la planul $(A'BD)$.

18 În prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu $AB = 4\sqrt{3}$ cm și $AA' = 4\,\text{cm}$, se consideră punctele M, N, P mijloacele muchiilor AB, BC, respectiv $A'C'$. Calculați:
a) Distanța de la punctul B la planul (ACC').
b) Distanța de la punctul A' la planul (MNP).

Lecția 12. Distanța dintre două plane paralele
Înălțimea prismei drepte și înălțimea paralelipipedului dreptunghic

Fie α și β, două plane paralele. Arătăm că distanța de la orice punct al planului α la planul β este aceeași. Fie $A, B \in \alpha$, $AA' \perp \beta, BB' \perp \beta$, unde $A', B' \in \beta$.

Dreptele AA' și BB', fiind perpendiculare pe același plan, sunt paralele și rezultă că $AA' = BB'$. (Vezi *Figura* 91.)

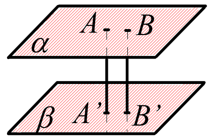


Figura 91

Definiție

- Distanța dintre două plane paralele este distanța de la un punct oarecare al unui plan la celălalt plan.
- Înălțimea unei prisme este lungimea segmentului perpendicular pe planele bazelor prismei, având capetele în cele două plane.

Observații

1. Înălțimea unei prisme drepte este egală cu lungimea muchiei laterale.

2. Prin înălțimea unui paralelipiped dreptunghic vom înțelege un segment perpendicular pe planele bazelor, dacă acestea sunt precizate. În caz contrar, orice segment perpendicular pe două fețe opuse, având capetele în cele două plane poate fi considerat înălțime.

3. Prin înălțimea unui cilindru circular drept se înțelege orice segment perpendicular pe baze, având capetele în cele două plane ale bazelor.

4. Prin înălțimea unui trunchi de piramidă, cât și a unui trunchi de con circular drept se înțelege orice segment perpendicular pe baze, având capetele în cele două plane ale bazelor (vezi *Figura* 92).

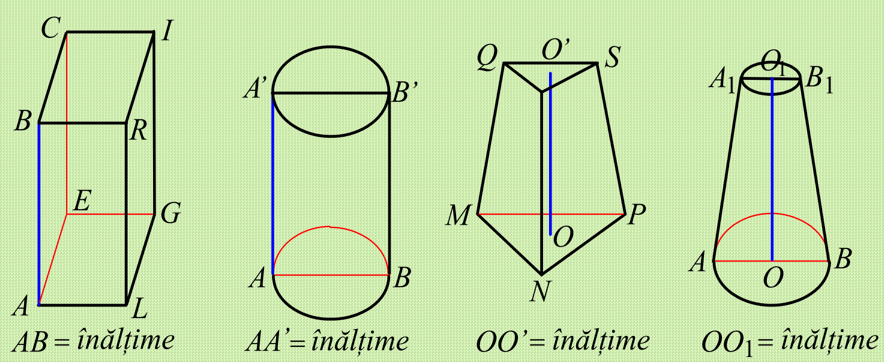
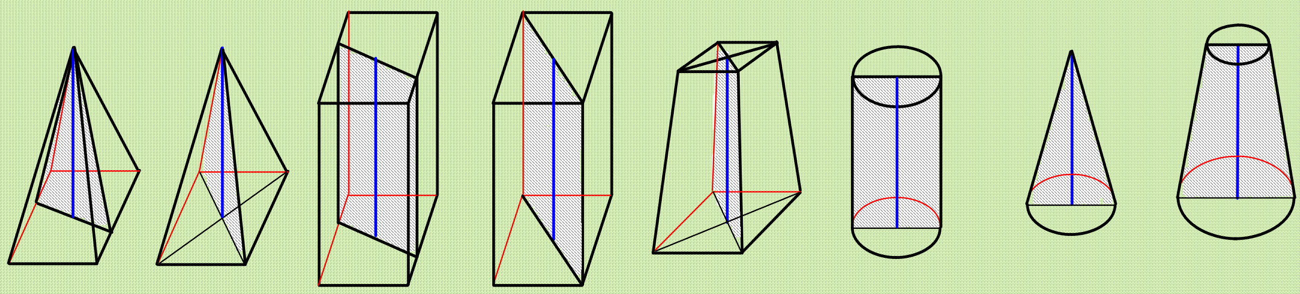


Figura 92

✓Secțiuni diagonale, secțiuni axiale în corpurile studiate

Fiind dat un corp care admite axă de simetrie, se numește *secțiune axială* poligonul obținut prin secționarea printr-un plan care conține axa de simetrie a corpului.

Observații 1. Secțiunile axiale în poliedre sunt variabile ca formă.
2. Secțiunile axiale care conțin o diagonală a unei baze se numesc secțiuni diagonale.
3. Secțiunile axiale în corpurile rotunde sunt congruente.
Justificare!



- *secțiune axială într-o piramidă patrulateră regulată*
- *secțiune diagonală într-o piramidă patrulateră regulată*
- *secțiune axială într-o prismă patrulateră regulată*
- *secțiune diagonală într-o prismă patrulateră regulată*
- *secțiune axială într-un trunchi de piramidă patrulateră regulată*
- *secțiune axială într-un cilindru circular drept*
- *secțiune axială într-un con circular drept*
- *secțiune axială într-un trunchi de con circular drept*

Problemă rezolvată

Prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are muchia bazei $AB = l$ și înălțimea $AA' = l\sqrt{3}$; $l > 0$. Aria secțiunii diagonale este egală cu $25\sqrt{6}$ cm^2.

a) Calculați distanța dintre planele (ABC) și $(A'B'C')$.

b) Calculați lungimea diagonalei prismei.

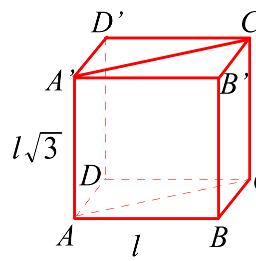


Figura 93

Soluție a) Secțiunea diagonală este, de exemplu, dreptunghiul $ACC'A'$.
Din ipoteză $\mathcal{A}_{ACC'A'} = 25\sqrt{6}$ cm^2, deci $AC \cdot AA' = 25\sqrt{6}$.
Rezultă $l\sqrt{2} \cdot l\sqrt{3} = 25\sqrt{6}$, de unde obținem $l = 5$ cm.
Cum $(ABC) \parallel (A'B'C')$ și $AA' \perp (ABC)$, rezultă că distanța dintre cele două plane este egală cu lungimea segmentului AA', adică este de $5\sqrt{3}$ cm.

b) $d_{\text{prismă}} = AC' = \sqrt{l^2 + l^2 + (l\sqrt{3})^2} = 5\sqrt{5}$ cm. (Vezi *Figura* 93.)

PROBLEME

1 Fie $SABC$ o piramidă triunghiulară regulată cu vârful S. Un plan α, paralel cu (ABC) intersectează muchiile SA, SB și SC în A', B', respectiv C'. Dacă $SA = 12$ cm, $SA' = 4$ cm și $SO = 9$ cm, unde O este centrul bazei ABC, calculați distanța dintre planele (ABC) și $(A'B'C')$.

2 Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă patrulateră regulată cu $AB = 4\sqrt{2}$ cm, iar O este centrul bazei $ABCD$. Știind că $A'O = 5$ cm, calculați:
a) lungimea înălțimii prismei;
b) aria secțiunii diagonale a prismei.

3 Paralelipipedul dreptunghic $ABCDEFGH$ are dimensiunile AB, AD, AE proporționale cu numerele 3, 2, respectiv 5. Știind că suma tuturor muchiilor paralelipipedului este egală cu 80 cm, calculați:

a) distanța dintre planele (ABC) și (EFG);

b) lungimea diagonalei paralelipipedului.

4 Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 6\,\text{cm}$.

a) Arătați că planele $(A'BD)$ și $(B'CD')$ sunt paralele.

b) Calculați distanța dintre planele $(A'BD)$ și $(B'CD')$.

5 Fie $ABCA_1B_1C_1$ o prismă dreaptă în care baza ABC este un triunghi echilateral cu $AB = 8\,\text{cm}$. Fie D, E, F mijloacele muchiilor AB, BC, respectiv B_1C_1.

a) Arătați că planele (DEF) și (ACC_1) sunt paralele.

b) Calculați distanța dintre planele (DEF) și (ACC_1).

6 Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu muchia bazei $AB = 6\sqrt{2}$ cm și $VA = 10\,\text{cm}$. Prin mijlocul înălțimii piramidei se duce un plan paralel cu baza. Calculați înălțimea trunchiului de piramidă care se formează.

7 Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are aria bazei mici egală cu $9\sqrt{3}$ cm^2 și aria bazei mari egală cu $81\sqrt{3}$ cm^2. Se face o secțiune cu un plan paralel cu bazele la aceeași distanță față de ambele baze. Calculați aria secțiunii.

8 Fie $ABCDA_1B_1C_1D_1$ un paralelipiped dreptunghic cu $AB = 2\,\text{dm}$, $BC = 2\sqrt{2}$ dm și $AA_1 = 1\,\text{dm}$.
Pe segmentul AD_1 se consideră punctele R și S, astfel încât $AR = RS = SD_1$. Planele α și β sunt paralele cu planul (ABC) și $R \in \alpha$, $S \in \beta$.

a) Calculați segmentul AD_1.

b) Calculați distanța dintre α și β.

TEMĂ DE SINTEZĂ

Recomandată pentru lucru în echipe

Definim simetricul unui punct A în raport cu un plan α astfel:

- dacă $A \notin \alpha$, simetricul lui A este punctul A' cu proprietatea că planul α trece prin mijlocul segmentului AA' și este perpendicular pe dreapta AA';
- dacă $A \in \alpha$, simetricul lui A este A.

Folosind Internetul, realizați un proiect intitulat *„Simetria față de un plan”* în care să puneți în evidență:

- studiul unor proprietăți ale simetriei față de plan prin analogie cu simetria față de o dreaptă într-un plan (studiată în clasa a VII-a).

- exemple de corpuri geometrice și corpuri din realitatea înconjurătoare care au un plan de simetrie (desene, fotografii, corpuri geometrice din carton realizate de voi).

TEST DE AUTOEVALUARE

Recomandat pentru portofoliu personal

10p din oficiu

SUBIECTUL I - Pe foaia de rezolvare scrieți numai rezultatele. (30 de puncte)

5p **1** Dacă a și b sunt drepte distincte, perpendiculare pe planul α, atunci dreptele a și b sunt . . .

5p **2** În paralelipipedul dreptunghic $ABCDEFGH$, dreptele AD și CG sunt . . .

5p 3. Diagonala unui cub are lungimea de $4\sqrt{3}$ cm. Lungimea muchiei cubului este egală cu . . . cm.

5p 4. Lungimea diagonalei unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 6 cm, $2\sqrt{6}$ cm și 2 cm este egală cu . . .

5p 5. Dacă $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată, cu vârful V, $AB = VA = 4$ cm și $AC \cap BD = \{O\}$, atunci lungimea segmentului VO este egală cu . . . cm.

5p 6. În prisma patrulateră regulată $ABCDMNPQ$, o dreaptă perpendiculară pe planul (BDQ) este dreapta . . .

SUBIECTUL al II-lea - Precizați litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

5p 1. Considerăm triunghiul dreptunghic ABC, $\widehat{A} = 90°$, $BC = 20$ cm, $AC = 16$ cm și fie $MB \perp (ABC)$, $MB =$ $= 5$ cm. Distanța MA este egală cu:

A. 13 cm **B.** 14 cm **C.** 15 cm **D.** 16 cm

5p 2. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu lungimea muchiei egală cu 4 cm, notăm $AC \cap BD = \{O\}$. Lungimea segmentului $A'O$ este egală cu:

A. 6 cm **B.** $2\sqrt{6}$ cm **C.** $4\sqrt{3}$ cm **D.** 8 cm

5p 3. Pe planul dreptunghiului $ABCD$ se ridică perpendiculara EA. Dacă $AB = \sqrt{7}$ cm, $BC = \sqrt{5}$ cm și $EA =$ $= 2\sqrt{6}$ cm, distanța dintre punctele E și C este egală cu:

A. 5 cm **B.** $4\sqrt{3}$ cm **C.** $5\sqrt{3}$ cm **D.** 6 cm

5p 4. Pe planul triunghiului dreptunghic ABC, $\widehat{A} = 90°$, ducem perpendiculara MO, $O \in (ABC)$. Știind că $MA = MB = MC$ și $AO = 5$ cm, atunci lungimea segmentului BC este egală cu:

A. 5 cm **B.** 10 cm **C.** 15 cm **D.** $5\sqrt{2}$ cm

5p 5. Dacă $ABCDA'B'C'D'$ este un cub cu latura de 6 cm, atunci distanța de la punctul C la planul $(AA'B)$ este egală cu:

A. 6 cm **B.** $6\sqrt{2}$ cm **C.** $6\sqrt{3}$ cm **D.** 12 cm

5p 6. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată cu muchia laterală $AA' = 5$ cm. Dacă D este mijlocul lui AC și $B'D = 13$ cm, atunci lungimea segmentului AB este egală cu:

A. $8\sqrt{2}$ cm **B.** 8 cm **C.** $8\sqrt{3}$ cm **D.** 10 cm

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de rezolvare scrieți rezolvările complete. (30 de puncte)

Fie $SABC$ o piramidă triunghiulară regulată, iar SO înălțimea sa. Se știe că $SA = 26$ cm și $SO = 10$ cm.

10p a) Arătați că $AB = 24\sqrt{3}$.

10p b) Demonstrați că $BC \perp SA$.

10p c) Dacă P este mijlocul muchiei SA și D mijlocul muchiei BC, calculați lungimea segmentului PD.

*

* *

Lecția 13. Proiecții de puncte, de segmente și de drepte pe un plan

✓ Proiecția unui punct pe un plan

În practică, pentru a verifica dacă un zid este vertical se folosește firul cu plumb (vezi *Figura* 94). Dacă firul cu plumb este suspendat din punctul A și extremitatea sa (plumbul) atinge planul α (planul solului), spunem că A' este proiecția ortogonală a punctului A pe planul α.

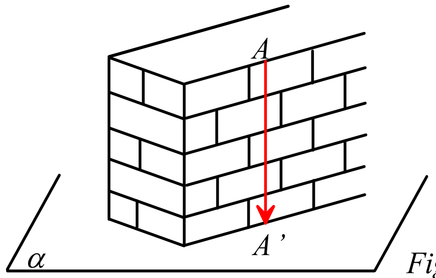


Figura 94

Definiție

- *Proiecția ortogonală* a unui punct pe un plan care nu conține punctul este piciorul perpendicularei dusă din acel punct pe plan.
- *Proiecția ortogonală* a unui punct pe un plan care conține punctul este punctul însuși.

Faptul că proiecția punctului A pe planul α este A' se notează $pr_\alpha A = A'$.

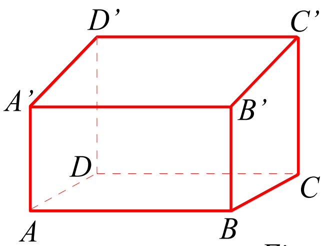


Figura 95

De exemplu, dacă $ABCDA'B'C'D'$ este un paralelipiped dreptunghic, proiecția punctului B' pe planul $(ABCD)$ este B, iar proiecția punctului A pe planul $(ABCD)$ este A.

Deci, notând $(ABC) = \alpha$, avem $pr_\alpha B' = B$ și $pr_\alpha A = A$. (Vezi *Figura* 95.)

✓ Proiecția unei drepte pe un plan

Definiție

Proiecția ortogonală a unei figuri geometrice pe un plan este mulțimea proiecțiilor tuturor punctelor figurii pe planul considerat.

Faptul că proiecția figurii F pe planul α este F' se notează $pr_\alpha F = F'$.

Din definiția anterioară deducem că prin proiecția unei drepte pe un plan înțelegem mulțimea proiecțiilor tuturor punctelor dreptei pe acel plan.

Teoremă

Proiecția unei drepte pe un plan este o dreaptă sau un punct.

Demonstrație

Cazul I: dreapta d nu este perpendiculară pe planul α.

Fie A, B două puncte care aparțin dreptei d și nu aparțin planului α. Notăm $pr_\alpha A = A'$ și $pr_\alpha B = B'$. Notăm cu d', dreapta determinată de punctele A' și B'. Demonstrăm că proiecția dreptei d pe planul α este dreapta d'. (Vezi *Figura* 96.)

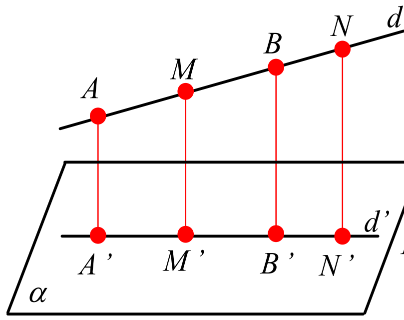


Figura 96

Dreptele AA' și BB' sunt paralele (fiind perpendiculare pe același plan), deci ele determină un plan. Notăm acest plan cu β și avem $\alpha \cap \beta = d'$.

Fie $M \in AB$ și $M' = pr_\alpha M$. Cum $M \in \beta$ și $MM' \parallel AA'$, rezultă $M' \in \beta$. Dar $M' \in \alpha$ deci $M' \in d'$.

Reciproc, fie N', un punct pe dreapta d'. Paralela la AA' dusă prin N' intersectează dreapta d în punctul N. Din $NN' \parallel AA'$ și $AA' \perp \alpha$, rezultă $NN' \perp \alpha$, deci $N' = pr_\alpha N$. Am arătat prin dublă incluziune că $pr_\alpha d = d'$.

Cazul II: dreapta d este perpendiculară pe planul α.

Notăm $d \cap \alpha = \{O\}$. (Vezi *Figura* 97.)

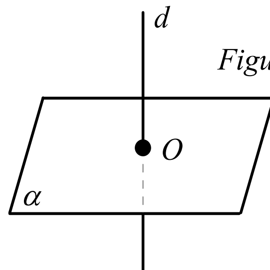


Figura 97

Toate punctele dreptei d au aceeași proiecție pe planul α, și anume punctul O, deci $pr_\alpha d = \{O\}$.

***Observații* 1.** Dacă dreapta d înțeapă planul într-un punct C și nu este perpendiculară pe plan, pentru a obține proiecția se proiectează un punct A al dreptei în A'.
Avem $A'C = pr_\alpha d$ (vezi *Figura* 98).

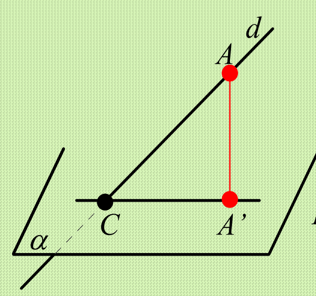


Figura 98

2. Dacă dreapta d este paralelă cu planul α, atunci $d' = pr_\alpha d$ este paralelă cu d (vezi *Figura* 99).

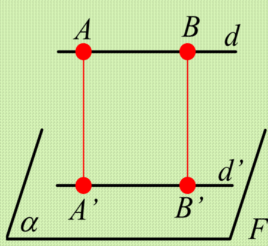


Figura 99

✓ Proiecția unui segment pe un plan

Proiecția unui segment pe un plan se bazează pe următorul rezultat.

Teoremă

Proiecția unui segment pe un plan este un segment sau un punct.

Reține!

Dacă dreapta AB nu este perpendiculară pe planul α, atunci proiecția segmentului AB pe planul α este segmentul ale cărui capete se obțin proiectând punctele A și B pe planul α.

Dacă dreapta AB este perpendiculară pe planul α, atunci proiecția segmentului AB pe planul α este punctul de intersecție a planului α cu dreapta AB.

Exemplu Proiecțiile segmentelor din *Figura* 100 pe planul α sunt desenate în figură și prezentate în tabelul următor.

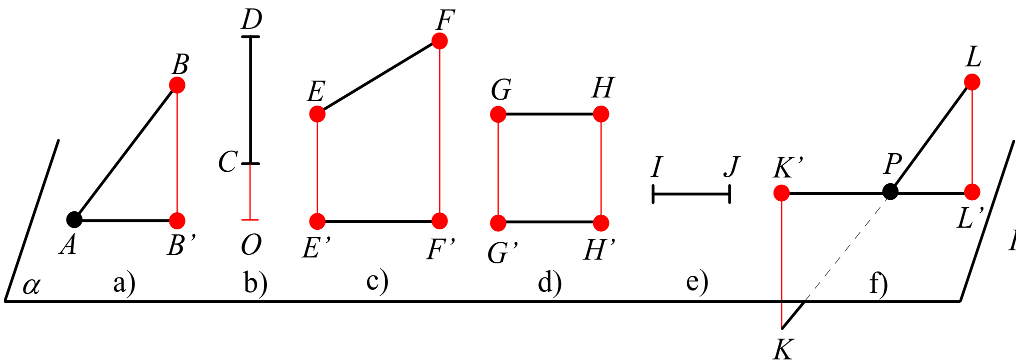


Figura 100

Ipoteză	Segmentul	Proiecția segmentului pe α
$A \in \alpha$, $B \notin \alpha$ și $AB \not\perp \alpha$ (*Figura* 100 a))	AB	AB'
$CD \perp \alpha$, $C \notin \alpha$, $D \notin \alpha$ (*Figura* 100 b))	CD	$\{O\}$
$E \notin \alpha$, $F \notin \alpha$ și $EF \nparallel \alpha$ (*Figura* 100 c))	EF	$E'F'$
$G \notin \alpha$, $H \notin \alpha$, $GH \parallel \alpha$ (*Figura* 100 d))	GH	$G'H'$
$I \in \alpha$, $J \in \alpha$ (*Figura* 100 e))	IJ	IJ
$K \notin \alpha$, $L \notin \alpha$, $KL \cap \alpha = \{P\}$ (*Figura* 100 f))	KL	$K'L'$

Problemă rezolvată

Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub. Indicați, în fiecare caz, care este proiecția:

a) punctului A pe planul $(B'C'D')$;
b) segmentului AD' pe planul (BCD);
c) dreptei $B'D'$ pe planul (ABC);
d) dreptei AA' pe planul (BCD);
e) dreptei $A'B'$ pe planul (DCC');
f) dreptei AC' pe planul $(A'B'D')$;
g) dreptei AC pe planul (ABD).

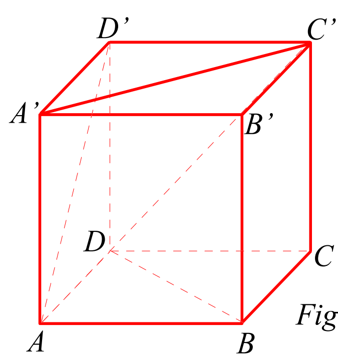


Figura 101

Soluție a) A', deoarece $AA' \perp (B'C'D')$; b) AD;
c) BD, deoarece $DD' \perp (ABC)$ și $BB' \perp (ABC)$;
d) $\{A\}$, deoarece $AA' \perp (BCD)$; e) $D'C'$;
f) $A'C'$; g) AC, deoarece $AC \subset (ABD)$.

PROBLEME

1 Desenați paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ și precizați proiecția:
a) lui A' pe (ABC); b) lui B' pe (ABC); c) lui A' pe (BCC'); d) lui A pe (BCD);
e) lui A pe (BCC'); f) lui D pe $(A'B'B)$; g) segmentului $A'B$ pe (ABC);
h) segmentului $A'B'$ pe (ABC);
i) segmentului $B'D'$ pe (ABC); j) segmentului $A'B'$ pe (BCC');
k) segmentului $A'C$ pe (ABC); l) segmentului $D'B$ pe (ABC);
m) segmentului AD' pe $(A'AD)$; n) segmentului AD' pe (BCC').

2 $VABC$ este o piramidă triunghiulară, iar VO este înălțimea piramidei. Precizați proiecția lui:
a) V pe (ABC); b) A pe (VAC); c) A pe (ABC); d) VA pe (ABC); e) VB pe (ABC).

3 Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată, iar M și N sunt mijloacele segmentelor BC și respectiv $B'C'$. Precizați proiecția dreptei:
a) $A'B$ pe (ABC); b) $B'C'$ pe (ABC); c) BC pe $(A'B'C')$; d) BC' pe $(A'B'C')$;
e) MN pe (ABC); f) $B'M$ pe (ABC); g) NC pe (ABC); h) NC pe $(A'B'C')$;
i) $A'M$ pe (ABC); j) $A'N$ pe (ABC); k) $A'M$ pe (BCC'); l) AB pe (ABC).

4 Proiecția unui segment AB pe un plan α este segmentul $A'B'$. Demonstrați că proiecția mijlocului segmentului AB pe planul α este mijlocul segmentului $A'B'$.

5 Fie A, B, C trei puncte necoliniare situate în planul α și M, N, P trei puncte situate în afara planului, astfel încât $AM \perp \alpha$, $BN \perp \alpha$, $CP \perp \alpha$ (vezi *Figura* 102).

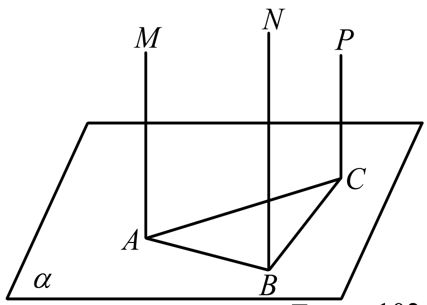


Figura 102

Indicați:
a) Trei drepte diferite care au ca proiecție pe planul α dreapta AB.
b) Trei segmente diferite care au ca proiecție pe planul α segmentul BC.
c) Trei triunghiuri diferite care au ca proiecție pe planul α triunghiul ABC.

6 $ABCDA'B'C'D'$ este un cub. Precizați proiecția:
a) punctului A pe (DCC'); b) punctului D' pe (BCC'); c) punctului C' pe (DCD');
d) segmentului DB' pe (ABC); e) segmentului DB' pe (ADD'); f) segmentului DB' pe (BCC');
g) segmentului DB' pe (ABA'); h) segmentului AD' pe (BDD').

7 Proiecția unui segment AB pe un plan α este segmentul $A'B'$. Dacă mijlocul lui $A'B'$ este proiecția unui punct M al segmentului AB, arătați că M este mijlocul lui AB.

8 $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată cu înălțimea VO.
a) Arătați că proiecțiile muchiilor VA, VB, VC, VD pe planul (ABC) au lungimile egale.
b) Precizați proiecția: *i*) lui VA pe (VBD); *ii*) lui VC pe (VBD); *iii*) lui VB pe (VAC).

9 Arătați că proiecția unui paralelogram $ABCD$ pe un plan α, cu $AB \subset \alpha$, este un paralelogram sau un segment.

10 Un triunghi ABC are $AB \subset \alpha$, $C \notin \alpha$, $CC' \perp \alpha$ și $C' \in \alpha$. Arătați că proiecția centrului de greutate al triunghiului ABC pe planul α este centrul de greutate al triunghiului ABC' sau un punct pe segmentul AB.

11 a) Dacă trei puncte sunt coliniare, demonstrați că proiecțiile lor pe un plan sunt puncte coliniare.
b) Dacă proiecțiile a trei puncte sunt coliniare rezultă că punctele sunt coliniare?

Lecția 14. Unghiul dintre o dreaptă și un plan Lungimea proiecției unui segment pe un plan

✓ Unghiul dintre o dreaptă și un plan

În *Figura* 103 este reprezentat un zmeu Z; AZ este sfoara zmeului, punctul A fiind fixat pe planul orizontal α. Înălțimea la care se ridică zmeul depinde de unghiul pe care sfoara îl formează cu planul orizontal. Dar ce trebuie să înțelegem prin unghiul dreptei AZ cu planul α? Notăm cu Z' proiecția zmeului pe planul solului. Vom spune că unghiul format de sfoară cu planul solului este unghiul ZAZ'.

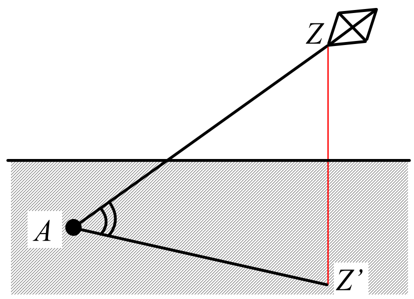


Figura 103

Dacă zmeul se ridică vertical (*Figura* 104), spunem că unghiul format de dreapta AZ cu planul α este drept.
Dacă zmeul se află pe sol (*Figura* 105), spunem că unghiul format de dreapta AZ cu planul α este nul.

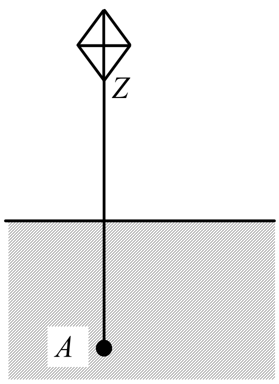


Figura 104

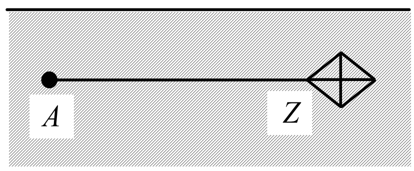


Figura 105

Definiție

- Dacă o dreaptă este conținută într-un plan sau este paralelă cu planul, unghiul acelei drepte cu planul este nul.
- Dacă o dreaptă este perpendiculară pe un plan, unghiul acelei drepte cu planul este drept.
- Dacă o dreaptă intersectează un plan și nu este perpendiculară pe acesta, unghiul dreptei cu planul este unghiul format de dreaptă cu proiecția ei pe plan.

Din definiție rezultă că măsura în grade a unghiului dintre o dreaptă și un plan aparține intervalului $[0°, 90°]$.
Unghiul format de dreapta d cu planul α se notează $\sphericalangle(d, \alpha)$.

În *Figura* 106, $\sphericalangle(d, \alpha) = \sphericalangle(BAB')$, unde $B' = pr_\alpha B$ și $d \cap \alpha = \{A\}$.

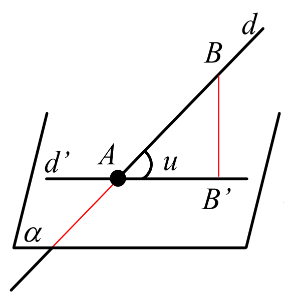


Figura 106

✓ Aplicație: Lungimea proiecției unui segment pe un plan

Lungimea proiecției ortogonale a unui segment pe un plan depinde atât de lungimea segmentului, cât și de unghiul format de dreapta ce conține segmentul cu planul considerat.

Teoremă

Fie l lungimea segmentului AB și l' lungimea proiecției sale pe un plan α care formează cu dreapta AB un unghi de măsură (în grade) $u \in [0°, 90°]$. Atunci $l' = l \cos u$.

Demonstrație

Fie $A' = pr_\alpha A$, $B' = pr_\alpha B$ și $AC \parallel A'B'$, $C \in BB'$.
Din triunghiul dreptunghic ACB, rezultă că $AC = AB \cdot \cos u$.
Cum $AC = A'B'$, rezultă că $A'B' = AB \cdot \cos u$, unde $u = \sphericalangle(AB, \alpha)$.
(Vezi *Figura* 107.)

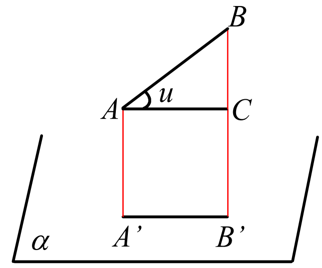


Figura 107

Observații **1.** Dacă $AB \parallel \alpha$, atunci $A'B' = AB$.
2. Dacă $AB \perp \alpha$, atunci lungimea proiecției lui AB pe α este nulă.

Reține!

Dacă dreapta AB formează cu planul α un unghi de măsură u, segmentul AB are lungimea l, iar proiecția sa pe planul α are lungimea l', atunci

$$l' = \begin{cases} l\cos u & \text{dacă } u \in (0, 90) \\ l & \text{dacă } u = 0° \\ 0 & \text{dacă } u = 90° \end{cases}.$$

Problemă rezolvată

În *Figura* 108 $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$, $BB' \perp \alpha$, $B' \in \alpha$.

a) Dacă $AB = 4$ cm și $\sphericalangle(AB, \alpha) = 45°$, calculați AB'.
b) Dacă $AB = 10$ cm și $AB' = 5$ cm, calculați $\sphericalangle(AB, \alpha)$.
c) Dacă $\sphericalangle(AB, \alpha) = 45°$ și $AB' = 2$ cm, calculați AB.

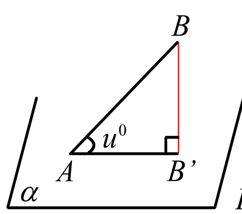


Figura 108

Soluție a) Avem $AB' = AB \cdot \cos u = 4 \cdot \cos 45° = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ cm.

b) Din $5 = 10 \cdot \cos u$ rezultă $\cos u = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ deci $u = 60°$.

c) Din $2 = AB \cdot \cos 45°$ rezultă $AB = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

PROBLEME

1 Un segment AB cu lungimea de 20 cm se proiectează pe un plan α. Unghiul format de AB cu α are măsura de: a) 45°; b) 60°; c) 30°.
Aflați lungimea proiecției lui AB pe planul α.

2 Segmentul AB cu lungimea de 8 cm se proiectează pe un plan α după segmentul $A'B'$. Dacă $AA' = 10\,\text{cm}$ și $BB' = 6\,\text{cm}$, aflați:
a) lungimea proiecției $A'B'$; b) măsura unghiului format de AB cu planul α.

3 Triunghiul ABC are $AC \subset \alpha$, $B \notin \alpha$, $AB = 10\,\text{cm}$, $BC = 10\sqrt{3}$ cm și unghiul format de AB cu planul α are măsura de 60°. Aflați măsura unghiului format de BC cu α și lungimea proiecției lui BC pe α.

4 În tetraedrul $VABC$ măsurile unghiurilor formate de VA, VB, VC cu planul (ABC) sunt egale cu 30°, 45° respectiv 60°. Dacă $VA = 10\,\text{cm}$, calculați lungimile proiecțiilor segmentelor VA, VB, VC pe planul (ABC).

5 În cubul $ABCDA'B'C'D'$, aflați: a) măsura unghiului dintre $A'B$ și planul (ABC);
b) tangenta unghiului format de $A'C$ cu planul (ABC).

6 $ABCA'B'C'$ este o prismă triunghiulară regulată cu baza ABC și $AB = 6\,\text{cm}$, $AA' = 2\sqrt{3}$ cm și M este mijlocul lui BC. Aflați:
a) măsura unghiului dintre $A'B$ și planul (ABC); b) tangenta unghiului format de $A'M$ cu planul (ABC);
c) lungimea proiecției segmentului AC' pe planul (BCC').

7 $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată cu baza $ABCD$, $AB = 2\sqrt{2}$ cm și înălțimea $VO = 2\sqrt{3}$ cm. Aflați:
a) măsura unghiului dintre VA și planul (ABC); b) lungimea proiecției muchiei VA pe planul (VBD).

8 În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, $AB = 6\,\text{cm}$, $BB' = 12\,\text{cm}$ și măsura unghiului format de BD' cu planul $(ABCD)$ este de 60°. Aflați: a) lungimea proiecției segmentului BD pe planul (ADD');
b) lungimea proiecției segmentului BD' pe planul $(ADD'A')$.

9 Un segment AB se proiectează pe un plan α după segmentul $A'B'$. Dacă $AA' = 4\,\text{cm}$, $BB' = 7\,\text{cm}$ și $A'B' = \sqrt{3}$ cm, aflați: a) lungimea segmentului AB;
b) măsura unghiului format de AB cu planul α.

10 Triunghiul ABC dreptunghic în A, are ipotenuza $BC \subset \alpha$. Unghiul dreptei AB cu planul α are măsura de 30°, unghiul dreptei AC cu planul α are măsura de 60°, iar distanța de la A la planul α este egală cu 9 cm. Calculați lungimile proiecțiilor laturilor triunghiului ABC pe planul α.

11 $ABCDA'B'C'D'$ este o prismă patrulateră regulată cu latura bazei egală cu 6 cm, iar unghiul dintre $A'C$ și (ABC) are măsura de 30°. Aflați lungimea proiecției segmentului $A'C$ pe planul $(ADD'A')$.

12 Un triunghi echilateral ABC se proiectează pe un plan α ce conține punctul A, după triunghiul $AB'C'$. Dacă AB și AC fac cu planul α unghiuri congruente (și sunt de aceeași parte a lui α) și $\sphericalangle(B'AC') = 90^\circ$, aflați măsura unghiului format de AC cu planul α.

13 Sfoara întinsă a unui zmeu are lungimea de 16 metri și formează cu solul un unghi de 30°. La ce înălțime se ridică zmeul?

Lecția 15. Teorema celor trei perpendiculare

✓ Teorema celor trei perpendiculare

În *Figura* 109, M este un punct fixat pe clădire, iar d reprezintă o bordură.
Pentru a obține o cât mai bună stabilitate ne punem problema cum trebuie ales pe dreapta d punctul A în care să se sprijine o scară AM perpendiculară pe d?

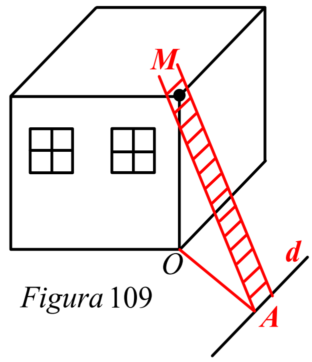


Figura 109

Răspunsul la această întrebare va fi dat cu ajutorul teoremei următoare:

Teorema celor trei perpendiculare

Considerăm un plan α, un punct M exterior planului și o dreaptă d inclusă în plan. Dacă O este proiecția lui M pe α și $O \notin d$, iar A este proiecția lui O pe d, atunci A este proiecția lui M pe d.

Ipoteză	Concluzie
$MO \perp \alpha, O \in \alpha$ $O \notin d,\ d \subset \alpha$ $OA \perp d, A \in d$	$MA \perp d$

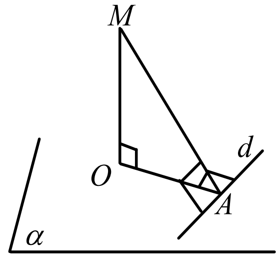


Figura 110

Demonstrație Din faptul că $MO \perp \alpha$ și $d \subset \alpha$, rezultă că $MO \perp d$.
Dreapta d este perpendiculară pe dreptele MO și OA, prin urmare este perpendiculară pe planul (MOA) determinat de aceste drepte. Cum $MA \subset (MOA)$, rezultă că d este perpendiculară pe dreapta AM.

Observații

1. În ipoteza teoremei intervin două relații de perpendicularitate, $MO \perp \alpha$, și $OA \perp d$, iar concluzia reprezintă o a treia relație de perpendicularitate $MA \perp d$. De aici provine numele teoremei.

2. Aplicând teorema celor trei perpendiculare, găsim răspunsul la problema pusă la începutul acestui paragraf: punctul A reprezintă proiecția punctului O pe d.

3. Fie B un punct pe dreapta d. Unghiul OAB reprezintă proiecția unghiului MAB pe planul α.

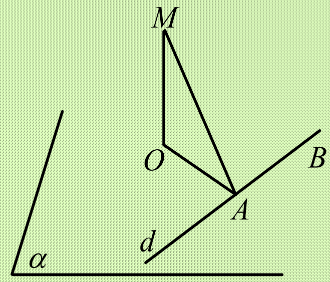


Figura 111

Deci enunțul teoremei celor trei perpendiculare poate fi exprimat astfel:
Dacă un unghi are o latură inclusă într-un plan dat și proiecția unghiului pe acest plan este un unghi drept, atunci unghiul considerat este drept.

✓ Calculul distanței de la un punct la o dreaptă

Din teorema celor trei perpendiculare, deducem un procedeu pentru calculul distanței de la un punct M la o dreaptă d inclusă într-un plan α.

- Construim $MO \perp \alpha$, $O \in \alpha$.
- Construim $OA \perp d$, $A \in d$.
- Distanța de la punctul M la dreapta d este MA, care poate fi calculată cu teorema lui *Pitagora* în triunghiul MOA (triunghiul format de cele trei perpendiculare).

Problemă rezolvată

Pe planul trapezului dreptunghic $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $\sphericalangle B = 90^\circ$, $\sphericalangle A = 45^\circ$, iar $AD = CD = 10$ cm, în punctul D se ridică perpendiculara $DM = 5$ cm.
Calculați distanța de la punctul M la dreptele:
a) BC; b) AB; c) AC.

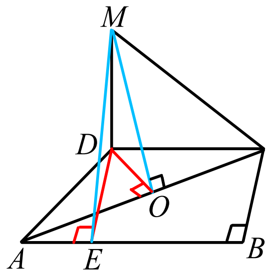


Figura 112

Soluție a) Avem $\sphericalangle BCD = 90^\circ$, deci $DC \perp CB$. Din $MD \perp (ABC)$ și $BC \subset (ABC)$, cu teorema celor trei perpendiculare rezultă $MC \perp BC$ deci $d(M, BC) = MC$. Cu teorema lui *Pitagora* în triunghiul MDC găsim $MC = 5\sqrt{5}$ cm.

b) $MD \perp (ABC)$; construim $DE \perp AB$, $E \in AB$ și din teorema celor trei perpendiculare obținem că $d(M, AB) = ME$. Având $\sphericalangle A = 45^\circ$, triunghiul AED este dreptunghic isoscel; găsim $DE = AE = 5\sqrt{2}$ cm, apoi $ME = 5\sqrt{3}$ cm.

c) Construim $DO \perp AC$, O fiind mijlocul lui AC deoarece triunghiul DAC este isoscel. Din $MD \perp (ABC)$, $DO \perp AC$, $AC \subset (ABC)$, rezultă din teorema celor trei perpendiculare că $d(M, AC) = MO$.

Vom calcula MO din triunghiul dreptunghic MOC în care cunoaștem ipotenuza $MC = 5\sqrt{5}$ cm. $AB = AE + EB$, $AB = 10 + 5\sqrt{2}$ cm și din teorema lui *Pitagora* în triunghiul ABC găsim $AC^2 = 200 + 100\sqrt{2}$, de aici $OC^2 = \dfrac{AC^2}{4} = 50 + 25\sqrt{2}$ și apoi $MO^2 = MC^2 - OC^2$; rezultă $MO = 5\sqrt{3 - \sqrt{2}}$ cm.

PROBLEME

1 Construiți din bețișoare și carton configurația teoremei celor trei perpendiculare.

2 Pe planul pătratului $ABCD$ cu $AB = 8$ cm se ridică perpendiculara MB, $MB = 6$ cm. Calculați distanța de la M la AD, CD și AC.

3 În centrul O al unui dreptunghi $ABCD$ se ridică perpendiculara $OM = 12$ cm. Calculați distanțele de la M la laturile dreptunghiului, dacă $AB = 4$ cm și $BC = 12$ cm.

4 Pe planul triunghiului echilateral ABC cu $AB = 6\sqrt{3}$ cm se ridică perpendiculara $MO = 12$ cm, unde O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Calculați distanța de la M la laturile triunghiului.

5 Pe planul hexagonului regulat $ABCDEF$ cu latura egală cu 6 cm se ridică perpendiculara $AM = 6$ cm. Calculați $d(M; FE)$, $d(M; ED)$, $d(M; FC)$.

6 Pe planul pătratului $ABCD$ se ridică perpendiculara $OM = 4$ cm, unde O este centrul pătratului. Dacă $AB = 8$ cm, calculați distanța de la M la laturi.

7 Pe planul rombului $ABCD$ cu $\sphericalangle A = 60^\circ$ și $AB = 6\sqrt{3}$ cm se ridică perpendiculara $AM = 6$ cm. Calculați distanțele de la M la BC, CD și BD.

8 În desenele din *Figura* 113 $AD \perp (ABC)$. Calculați în fiecare caz $d(D, BC)$.

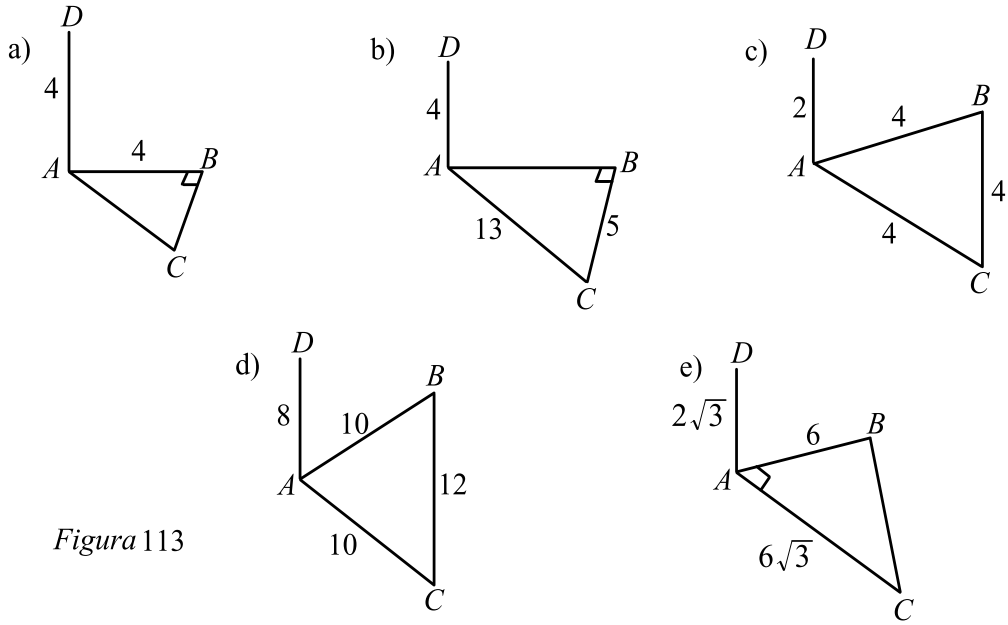


Figura 113

9 Construiți din carton cubul $ABCDA'B'C'D'$ și colorați segmentele AA', AB, $A'B$ și BC. Arătați că $A'B \perp BC$. (Vezi *Figura* 114.)

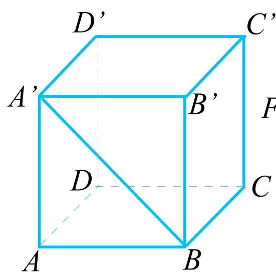


Figura 114

10 Fie dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 12$ cm și $BC = 9$ cm. Pe diagonala AC se consideră punctul M, astfel încât $\frac{AM}{AC} = \frac{2}{3}$. În punctul M se ridică perpendiculara PM, cu $PM = 8$ cm. Calculați distanțele de la punctul P la laturile dreptunghiului.

11 Fie $ABCDEF$ o prismă triunghiulară regulată, având latura bazei $AB = 12$ cm și înălțimea $AD = 6$ cm.
Calculați: a) distanța de la punctul F la dreapta AB;
b) distanța de la punctul F la dreapta AM, unde M este mijlocul muchiei BC.

12 Piramida patrulateră regulată $SABCD$ are latura bazei $AB = 12$ cm și înălțimea $SO = 8\sqrt{2}$ cm.
Calculați:
a) distanța de la punctul S la dreapta AD; b) distanța de la punctul B la dreapta SC.

13 Pe planul triunghiului dreptunghic ABC, $\hat{A} = 90°$, $AB = 3$ cm și $AC = 4$ cm, se ridică perpendiculara AM, $AM = 1$ dm. Aflați: a) distanța de la punctul M la dreapta BC;
b) distanța de la punctul B la dreapta MC; c) distanța de la punctul C la dreapta MB.

14 Se consideră prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu latura $AB = 4$ cm și $AA' = 6\sqrt{3}$ cm. Fie M mijlocul muchiei AA' și punctul N pe muchia BB', astfel încât $\frac{BN}{B'N} = \frac{1}{2}$. Calculați:
a) distanța de la punctul B la dreapta $A'C'$;
b) distanța de la punctul M la dreapta de intersecție a planelor (ABC) și (MNC).

Lecția 16. Unghi diedru
Unghi plan corespunzător diedrului
Unghiul a două plane

✓ Unghi diedru

Îndoind o foaie de hârtie ca în *Figura* 115, obținem un model pentru noțiunea de unghi diedru care este analoagă cu cea de unghi din geometria plană.

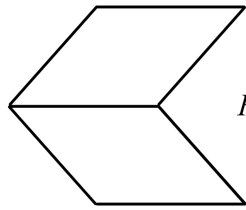


Figura 115

Definiție

Se numește *unghi diedru* (sau pe scurt *diedru*), figura geometrică formată din două semiplane mărginite de aceeași dreaptă.

Dreapta comună celor două semiplane se numește *muchia diedrului*, iar cele două semiplane se numesc *fețele diedrului*.

- Dacă fețele unui diedru coincid, spunem că diedrul este nul.
- Dacă fețele unui diedru sunt semiplane opuse, spunem că diedrul este plat.
- Diedrul ale cărui fețe sunt semiplanele α și β se notează $(\widehat{\alpha,\beta})$.

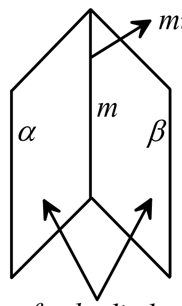


Figura 116

Pentru a compara două diedre se introduce noțiunea de unghi plan corespunzător diedrului.

Definiție

Se numește *unghi plan* corespunzător unui diedru, intersecția unui diedru cu un plan perpendicular pe muchia sa.

Fie $(\widehat{\alpha,\beta})$ un unghi diedru, m muchia sa și γ un plan perpendicular pe m. Notăm cu O intersecția planului γ cu muchia m. Planul γ intersectează semiplanele α și β după două semidrepte a și b cu originea în O.

Unghiul $(\widehat{a,b})$ este unghiul plan corespunzător diedrului $(\widehat{\alpha,\beta})$.

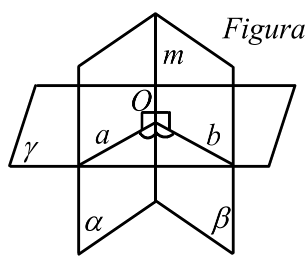


Figura 117

Măsura unghiului plan corespunzător unui diedru nu depinde de poziția punctului O pe muchia diedrului în care a fost dus planul perpendicular pe aceasta.

Toate unghiurile plane corespunzătoare unui diedru sunt congruente, fiind unghiuri cu laturile respectiv paralele.

Definiție

Măsura unui unghi diedru este măsura unghiului plan corespunzător diedrului.

În practică, pentru a construi unghiul plan corespunzător unui diedru se fixează un punct pe muchia diedrului și se construiesc două semidrepte perpendiculare pe muchie cu originea în acel punct și conținute în fețele diedrului.

- Dacă măsura unui unghi diedru este mai mică decât 90°, atunci diedrul este *ascuțit*.
- Dacă măsura unui unghi diedru este 90°, atunci diedrul este *drept*.
- Dacă măsura unui unghi diedru este mai mare decât 90°, atunci diedrul este *obtuz*.

✓ Unghiul dintre două plane

Două plane secante formează patru unghiuri diedre.

Definiție

Măsura unghiului dintre două plane este egală cu măsura unui diedru ascuțit (sau drept) format de acestea.

Observație Măsura unghiului dintre două plane este măsura unghiului dintre două drepte incluse respectiv în cele două plane și perpendiculare în același punct pe dreapta de intersecție.

În *Figura* 118 $\widehat{\alpha,\beta} = \widehat{a,b}$.

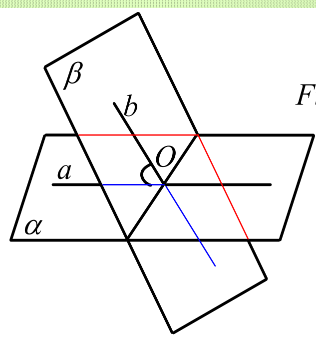


Figura 118

Problemă rezolvată

Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu $AB = BC = 4$ cm și $AA' = 4\sqrt{3}$ cm.

Calculați măsura unghiului dintre planele:

a) (BCC') și (ACC'); b) (ABD') și (ABB'); c) (ABD') și (ABC).

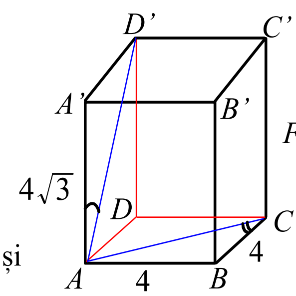


Figura 119

Soluție a) $(BCC') \cap (ACC') = CC'$, $BC \perp CC'$ și $BC \subset (BCC')$, $AC \perp CC'$ și $AC \subset (ACC')$. Rezultă că $\sphericalangle(BCC', (ACC')) = \sphericalangle BCA = 45°$.

b) $(ABD') \cap (ABB') = AB$, $D'A \perp AB$ și $D'A \subset (ABD')$, $AA' \perp AB$ și $AA' \subset (ABB')$.

Rezultă că $\sphericalangle(ABD'), (ABB') = \sphericalangle A'AD'$. $\text{tg}(\sphericalangle A'AD') = \frac{A'D'}{AA'} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, deci $\sphericalangle A'AD' = 30°$.

c) $(ABD') \cap (ABC) = AB$, $AD' \perp AB$ și $AD' \subset (ABD)$, $AD \perp AB$ și $AD \subset (ABC)$.

Rezultă că $\sphericalangle(ABC), (ABD') = \sphericalangle D'AD$, $\text{tg}(\sphericalangle D'AD) = \sqrt{3}$, deci $\sphericalangle(D'AD) = 60°$.

PROBLEME

1 În *Figura* 120 $ABCD$ este un dreptunghi și $ABEF$ este un trapez dreptunghic cu $AB \parallel EF$ și $\sphericalangle F = 90°$.
Numiți unghiul plan corespunzător diedrului din figură.

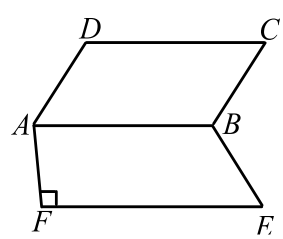


Figura 120

2 Se dă cubul $ABCDA'B'C'D'$. Determinați măsura unghiului format de planele:
a) (ABC) și (ABC'); b) (ABC) și (BCA');
c) $(A'B'C')$ și $(A'B'C)$; d) (ACA') și (DBD').

3 Un cort are formă de prismă triunghiulară regulată $ABCDEF$. Lungimea cortului este $AD = 3,6\text{ m}$, iar muchia bazei este $AB = 1,8\text{ m}$.

a) Aflați măsura unghiului format de dreptele BC și DF.
b) Calculați tangenta unghiului format de planele (ABC) și (BCD).
c) Aflați cât costă pânza necesară confecționării cortului, știind că 1 m^2 de pânză costă 30 lei (se acoperă cu pânză toate fețele cortului, iar $\sqrt{3} \approx 1,73$).

4 Pe planul triunghiului dreptunghic isoscel ABC cu $\sphericalangle A = 90°$ și $AC = 6\text{ cm}$, se ridică perpendiculara BD, $BD = 6\sqrt{3}$ cm. Aflați măsura unghiului diedru care are fețele (ABC) și (ACD).

5 Pe planul triunghiului echilateral ABC cu $AB = 8\text{ cm}$ se ridică perpendiculara $AM = 4\text{ cm}$. Aflați măsura unghiului dintre (ABC) și (BCM).

6 Pe planul triunghiului dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $AC = 12\text{ cm}, AB = 16\text{ cm}$ se ridică perpendiculara DA, astfel încât $DA = 9,6\sqrt{3}$ cm. Determinați măsurile unghiurilor diedre determinate de:
a) (ABC) și (BCD); b) (ABC) și (ABD); c) (ABC) și (ACD).

7 Capacul unui container în formă de cub cu muchia de 1 m se deschide și este susținut de o tijă cu lungimea de 1 m. Aflați măsura unghiului diedru ale cărui fețe sunt cele două poziții ale capacului (închis și deschis). (Vezi *Figura* 121.)

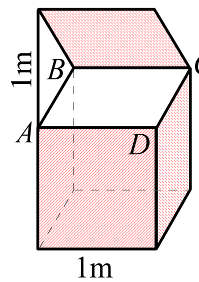


Figura 121

8 Prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are $AB = 6\text{ cm}$, $AA' = 12\text{ cm}$ și M este mijlocul lui CC'. Calculați:
a) măsura unghiului dintre (ABB') și (ACC');
b) tangenta unghiului dintre $(A'BC)$ și (ABC); c) tangenta unghiului dintre $(A'MB)$ și (ABC).

9 $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată cu muchia bazei AB și muchia laterală VA. Știind că $AB = 8\text{ cm}$ și $VA = 4\sqrt{5}$ cm, calculați: a) măsura unghiului dintre (VAB) și (ABC);
b) măsura unghiului dintre (VAB) și (VCD); c) tangenta unghiului dintre (VAC) și (VAB).

10 O foaie de carton dreptunghiulară, notată $ABCD$, unde $AB = 20\text{ cm}$, are latura AD conținută în planul mesei. Dacă distanța de la punctul C la planul mesei este de 10 cm, calculați măsura unghiului determinat de planul dreptunghiului și planul mesei.

11 Pe planul dreptunghiului $ABCD$ cu $AB = 4\text{ cm}$ și $AD = 4\sqrt{3}$ cm, se ridică perpendiculara AM, cu $AM = 4\text{ cm}$. Aflați: a) măsura unghiului dintre (MCD) și (ABC); b) măsura unghiului dintre (MBC) și (ABC).

12 Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are $AB = 6\sqrt{3}$ cm, $AD = 6\text{ cm}$ și $AA' = 9\text{ cm}$. Aflați:
a) tangenta unghiului dintre $(A'BC)$ și (ABC);
b) măsura unghiului dintre $(A'BD)$ și (ABC); c) tangenta unghiului dintre (ABC) și $(A'DC)$.

13 Tetraedrul $ABCD$ are toate muchiile congruente și M este mijlocul lui CD. Aflați:
a) cosinusul unghiului dintre (ACD) și (BCD); b) sinusul unghiului dintre (ABM) și (ABC).

Lecția 17. Plane perpendiculare

Definiție

Două plane se numesc *perpendiculare* dacă formează un diedru drept.

Exemplu Planul podelei unei săli de clasă și planul unuia dintre pereții sălii sunt două plane perpendiculare.

Dacă α și β sunt plane perpendiculare, scriem: $\alpha \perp \beta$.

În *Figura* 122, planul ușii este perpendicular pe planul podelei.

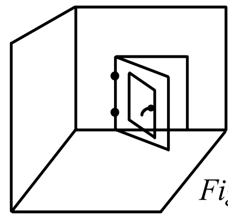


Figura 122

Acest ultim exemplu sugerează următoarea teoremă:

Teorema 1

Dacă o dreaptă este perpendiculară pe un plan dat, atunci orice plan care conține dreapta este perpendicular pe planul dat.

Demonstrație Fie $d \perp \alpha$, $d \cap \alpha = \{O\}$ și β un plan care conține d (vezi *Figura* 123). Demonstrăm că $\beta \perp \alpha$.

Notăm $c = \beta \cap \alpha$, $O \in c$ și considerăm în planul α, dreapta b perpendiculară pe c, $O \in b$. Deoarece $d \perp \alpha$ și $b \subset \alpha$, rezultă că $d \perp b$.

Unghiul plan corespunzător diedrului format de planele α și β este drept, deci $\alpha \perp \beta$.

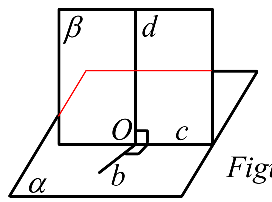


Figura 123

Observație Această teoremă ne oferă o metodă de a demonstra că două plane sunt perpendiculare. Dacă un plan conține o dreaptă perpendiculară pe alt plan, atunci planele sunt perpendiculare.

Teorema 2

Dacă două plane sunt perpendiculare, atunci orice dreaptă conținută în unul dintre ele și perpendiculară pe dreapta lor de intersecție, este perpendiculară pe celălalt plan.

Demonstrație Fie $\alpha \cap \beta = a$, $\alpha \perp \beta$, $d \subset \beta$ și $d \perp a$, $d \cap a = \{O\}$.

Construim $b \subset \alpha$ și $b \perp a$. Cum $\alpha \perp \beta$, rezultă $d \perp b$.

Deoarece $d \perp a$, rezultă $d \perp \alpha$.

(Vezi *Figura* 124.)

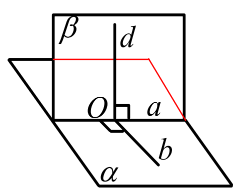


Figura 124

Problemă rezolvată

Muchia cubului $ABCDA'B'C'D'$ are 10 cm.
Arătați că $(BCA') \perp (ABA')$ și calculați $d(A, (A'BC))$.

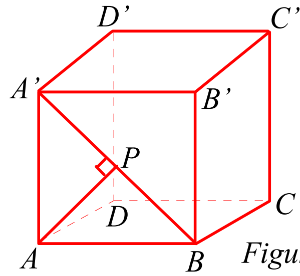


Figura 125

Soluție Dreapta BC este perpendiculară pe dreptele AB și BB' din planul (ABA'), deci $BC \perp (ABA')$. Cum $BC \subset (BCA')$, rezultă $(BCA') \perp (ABA')$.

Intersecția planelor (BCA') și (ABA') este $A'B$. Ducem $AP \perp A'B$, $P \in A'B$ și rezultă $AP \perp (A'BC)$, deoarece $(BCA') \perp (ABA')$. Deci $d(A, (A'BC)) = AP$, unde punctul P este intersecția diagonalelor pătratului $ABB'A'$. Deci $AP = \frac{AB'}{2} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$ cm.

PROBLEME

1 Pe planul pătratului $ABCD$ se ridică perpendiculara AE. Arătați că:
a) $(EAB) \perp (EAD)$; b) $(EAB) \perp (EBC)$; c) $(EAD) \perp (EDC)$; d) $(EAC) \perp (EDB)$.

2 Triunghiul dreptunghic isoscel ABC cu $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 6$ cm se îndoaie de-a lungul înălțimii AD, $D \in BC$ până când planele (ABD) și (ADC) devin perpendiculare. Calculați:
a) distanța dintre punctele B și C după îndoire; b) $d(C, (ABD))$ după îndoire.

3 Triunghiurile dreptunghice ABC și ABD sunt situate în plane perpendiculare. Dacă $AB = AC = 16$ cm, $\sphericalangle ADB = 90°$ și $AD = 8$ cm, calculați: a) CD; b) $d(B, (ACD))$; c) $d(A, (BCD))$.

4 Dreptunghiul $ABCD$ și pătratul $ABEF$ sunt situate în plane perpendiculare. Dacă $AB = 40$ cm și $BC = 30$ cm, atunci: a) calculați $d(C, FE)$; b) calculați $d(C, AE)$;
c) arătați că $(ACE) \perp (FBC)$; d) calculați $d(B, (CAE))$.

5 Triunghiurile ABC și BCD sunt dreptunghice și isoscele cu ipotenuza BC. Dacă triunghiul ABD este echilateral, arătați că $(ABC) \perp (BCD)$.

6 Dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 10$ cm și $BC = 10\sqrt{3}$ cm se îndoaie după diagonala AC până când planele (ABC) și (ACD) devin perpendiculare. Calculați BD după îndoire.

7 Pe planul triunghiului echilateral ABC se ridică perpendiculara AD. Dacă M este mijlocul laturii BC arătați că: a) $(ADC) \perp (ABC)$; b) $(ADM) \perp (ABC)$; c) $(ADM) \perp (DBC)$.

8 Tetraedrul $ABCD$ are $AB = AC = AD = a$ și $BC = DC = BD = a\sqrt{2}$. Arătați că:
a) $(ABC) \perp (ACD)$; b) $(ABC) \perp (ABD)$.

9 Romburile $ABCD$ și $ABEF$ au $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABE = 45°$ și sunt situate în plane diferite. Dacă triunghiul BCE este echilateral, arătați că $(ABC) \perp (ABE)$.

10 Fie α și β două plane perpendiculare. Considerăm punctele A și B pe dreapta comună a celor două plane și punctele $C \in \alpha$, $D \in \beta$ astfel încât $AC \perp AB$, $AD \perp AB$, $AC = 3$ cm, $AB = 4$ cm și $BD = 12$ cm. Calculați:
a) lungimea segmentului CD; b) distanța de la punctul C la dreapta BD;
c) sinusul unghiului format de dreapta CD cu planul β;
d) cosinusul unghiului format de planul (BCD) cu planul β.

Lecția 18. Calculul distanței de la un punct la un plan
Calculul distanței dintre două plane paralele

✓ Prima reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare

Teoremă
(Prima reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare)

Considerăm un plan α, un punct M exterior planului și o dreaptă d inclusă în plan. Dacă O este proiecția lui M pe α și $O \notin d$, iar A este proiecția lui M pe d, atunci A este proiecția lui O pe d.

Ipoteză	Concluzie
$MO \perp \alpha, O \in \alpha$ $O \notin d,\ d \subset \alpha$ $MA \perp d, A \in d$	$OA \perp d$

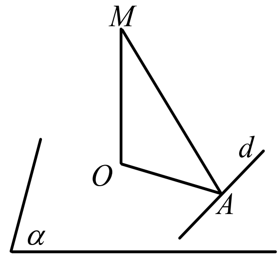


Figura 126

Demonstrație Din faptul că $MO \perp \alpha$ și $d \subset \alpha$, rezultă că $MO \perp d$. (Vezi *Figura* 126.)

Dreapta d este perpendiculară pe dreptele MO și MA, prin urmare este perpendiculară pe planul (MOA) determinat de aceste drepte. Cum $OA \subset (MOA)$, rezultă că d este perpendiculară pe dreapta OA.

Observații

1. Enunțul primei reciproce a teoremei celor trei perpendiculare poate fi exprimat și astfel:

Dacă un unghi drept are o latură inclusă într-un plan dat, iar cealaltă latură este oblică, atunci proiecția unghiului pe acest plan este un unghi drept.

2. Dreapta OA din teoremă este perpendiculară atât pe MO, cât și pe d. Spunem că OA este perpendiculara comună a dreptelor MO și d.

✓ Calculul distanței de la un punct la un plan

Distanța de la un punct la un plan este distanța dintre punct și proiecția lui pe plan. O modalitate de construcție a proiecției punctului pe plan este dată de următoarea teoremă:

Teoremă
(A doua reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare)

Considerăm un plan α, un punct M exterior planului și o dreaptă d inclusă în plan. Dacă A este proiecția punctului M pe dreapta d, iar punctul $O \in \alpha$, astfel încât $OA \perp d$ și $MO \perp OA$, atunci $MO \perp \alpha$.

Ipoteză	Concluzie
$d \subset \alpha$ $MA \perp d, A \in d$ $b \subset \alpha, b \perp d, A \in b$ $MO \perp b, O \in b$	$MO \perp \alpha$

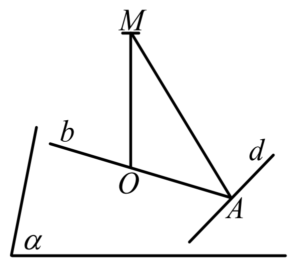


Figura 127

Demonstrație Dreapta d este perpendiculară pe dreptele OA și MA, prin urmare este perpendiculară pe planul (MOA). Dreapta MO fiind conținută în acest plan, rezultă $d \perp MO$. Din $MO \perp b$ și $MO \perp d$, rezultă că $MO \perp \alpha$.

Din teoremă deducem un procedeu pentru construcția perpendicularei dintr-un punct pe un plan.

Algoritm pentru construirea perpendicularei din punctul M pe planul α:
- Construim proiecția punctului M pe o dreaptă d inclusă în planul α. Notăm această proiecție cu A.
- Construim în planul α dreapta b care este perpendiculară pe dreapta d în punctul A.
- Construim proiecția O a punctului M pe dreapta b.
- Rezultă că $MO \perp \alpha$, deci distanța de la punctul M la planul α, notată $d(M, \alpha)$, este MO.

Problemă rezolvată

Pătratul $ABCD$ cu $AB = 10$ cm și triunghiul echilateral MAD sunt situate în plane diferite. Știind că $\sphericalangle MAB = 90^\circ$, calculați:

a) $d(M, (ABC))$; b) $d(A; (MBC))$.

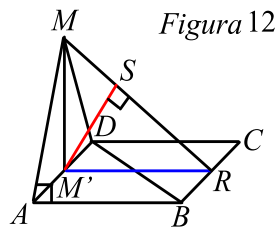


Figura 128

Soluție a) Deoarece $MA \perp AB$, $DA \perp AB$, construim $MM' \perp AD$ și, conform reciprocei a doua a teoremei celor trei perpendiculare, vom avea $d(M, (ABC)) = MM'$.

Cum MM' este înălțime în triunghiul echilateral MAD, avem $MM' = 5\sqrt{3}$ cm.

b) Deoarece $AD \parallel BC$ și $BC \subset (MBC)$, rezultă că $AD \parallel (MBC)$, deci $d(A; (MBC)) = d(M'; (MBC))$.

Fie R mijlocul lui BC. Deoarece $BC \perp M'R$, $BC \perp MM'$, $M'R, MM' \subset (MM'R)$, rezultă că $BC \perp (MM'R)$.

Cum $BC \subset (MBC)$, rezultă că $(MBC) \perp (MM'R)$.

Cum $(MBC) \cap (MM'R) = MR$, rezultă că $d(M'; (MBC)) = M'S$, unde $M'S \perp MR$, $S \in MR$.

Din triunghiul $MM'R$, dreptunghic în M' avem: $M'S = \dfrac{MM' \cdot M'R}{MR} = \dfrac{5\sqrt{3} \cdot 10}{5\sqrt{7}} = \dfrac{10\sqrt{21}}{7}$ cm.

✓ Calculul distanței dintre două plane paralele

Distanța dintre două plane paralele este distanța de la un punct al unui plan la celălalt plan.

În *Figura* 129, planele α și β sunt paralele, $M \in \alpha$, $MN \perp \beta$ și $N \in \beta$.
Distanța dintre α și β este MN și notăm $d(\alpha; \beta) = MN$.

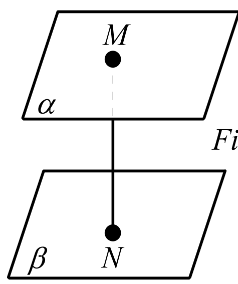


Figura 129

Problemă rezolvată

Fie $SABC$ o piramidă cu baza ABC triunghi echilateral cu latura de 10 cm și $SA = SB = SC = 5\sqrt{2}$ cm.

a) Arătați că triunghiul ASB este dreptunghic.

b) Calculați $d(A, (SBC))$.

c) Construiți prin M, mijlocul lui SA un plan paralel cu (ABC) și calculați distanța dintre cele două plane paralele.

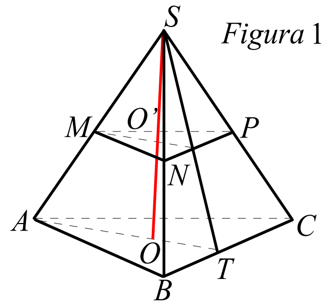


Figura 130

Soluție a) Din $SA^2 + SB^2 = AB^2$, rezultă cu reciproca teoremei lui *Pitagora* că $SA \perp SB$.

b) Analog ca la a), $SA \perp SC$; rezultă $SA \perp (BSC)$ deci $d(A, (SBC)) = AS = 5\sqrt{2}$ cm.

c) Planul este (MNP), N este mijlocul lui SB și P este mijlocul segmentului SC. Construim $ST \perp BC$, T este mijlocul segmentului BC, de unde rezultă că $AT \perp BC$. Construim $SO \perp AT$ și rezultă $d(S, (ABC)) = SO$.

Din faptul că $AS \perp (BSC)$ rezultă $AS \perp ST$, deci $SO = \dfrac{AS \cdot ST}{AT} = \dfrac{5\sqrt{6}}{3}$cm. Dacă $SO \cap (MNP) = \{O'\}$, rezultă că $d((MNP), (ABC)) = OO' = \dfrac{1}{2}SO = \dfrac{5\sqrt{6}}{6}$cm.

PROBLEME

1 Pe planul triunghiului dreptunghic ABC cu $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 15$ cm, $AC = 2$ dm se ridică perpendiculara AP, $AP = 12\sqrt{3}$ cm. Calculați $d(A, (PBC))$.

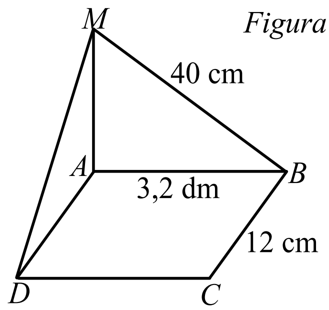


Figura 131

2 În *Figura* 131, $ABCD$ este un dreptunghi și $AM \perp (ABC)$. Calculați $d(A, (MBC))$, $d(M, (ABC))$, $d(A, (MDC))$.

3 Pe planul triunghiului isoscel ABC cu $AB = AC = 25$ cm și $BC = 30$ cm se ridică perpendiculara în A pe care se ia punctul D, astfel încât $AD = 10$ cm. Calculați $d(D, BC)$ și $d(A, (DBC))$.

4 Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm și $AA' = 12$ cm.
Calculați: a) $d(A; (BDD'))$; b) $d(B; (B'A'C))$.

5 Fie $ABCDEFGH$ o prismă dreaptă cu baza pătratul $ABCD$, $AB = 6$ cm, iar $\sphericalangle(AG; (ABC)) = 60°$.
Calculați: a) $d(B; (ACG))$; b) $d(D; (ACH))$.

6 Pe planul dreptunghiului $ABCD$, în care $AB = 12$ cm și $AC = 13$ cm se ridică perpendiculara AM, $AM = 20$ cm.
Calculați: a) $d(A; (BDM))$; b) $d(A; (CDM))$.

7 Pe planul trapezului isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, cu $AB = 12$ cm, $AD = BC = CD = 6$ cm, se ridică perpendiculara AE cu $AE = 6$ cm. Calculați:
a) $d(A; (EBC))$; b) $d(A; (EDC))$.

TEME DE SINTEZĂ

Recomandate pentru lucru în echipe

1 Un brad de Crăciun cu vârful V este ancorat prin trei cabluri întinse AV, BV și CV care formează cu planul solului unghiuri de 60°. Știind că punctele A, B, C sunt vârfurile unui triunghi echilateral cu latura de 15 m, calculați valoarea aproximativă a înălțimii bradului.

2 Fiind dat un tetraedru din lemn, găsiți un procedeu prin care, trasând linii pe suprafața tetraedrului, să determinați proiecția unui vârf pe fața opusă.

TEST DE AUTOEVALUARE

Recomandat pentru portofoliu personal

10p din oficiu

SUBIECTUL I - Pe foaia de rezolvare scrieți numai rezultatele. (30 de puncte)

5p 1. În cubul $ABCDEFGH$, proiecția segmentului EC pe planul (ABC) este segmentul . . .

5p 2. Pe planul pătratului $ABCD$ se ridică perpendiculara PA. Dacă $AB = PA = a$, $a > 0$, tangenta unghiului format de planele (ABC) și (PBD) este egală cu . . .

5p 3. Un segment MN se proiectează pe planul α după segmentul $M'N'$. Dacă $MN = 6\,\text{cm}$ și $\sphericalangle(MN;\alpha) = 60^\circ$, atunci lungimea segmentului $M'N'$ este egală cu . . .

5p 4. Prisma triunghiulară regulată $ABCA_1B_1C_1$ are muchia bazei $AB = 4\,\text{cm}$. Lungimea proiecției segmentului BC pe planul $(A_1B_1C_1)$ este egală cu . . . cm.

5p 5. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are vârful V și $VA = AB$. Măsura unghiului format de dreapta VA cu planul (ABC) este de . . . $^\circ$.

5p 6. Pe planul dreptunghiului $ABCD$, având $AB = \sqrt{2}$ cm, se ridică perpendiculara MA, $MA = \sqrt{6}$ cm. Unghiul dintre planele (ABC) și (MBC) are măsura de . . . $^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea - Precizați litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

5p 1. Fie planul α și punctele $A, B, C \in \alpha$, $P \notin \alpha$ astfel încât $PA \perp \alpha$, $AB \perp BC$, $PA = 12\,\text{cm}$, $AB = 5\,\text{cm}$. Distanța de la punctul P la dreapta BC este egală cu:

A. 15 cm **B.** 13 cm **C.** 12 cm **D.** 20 cm

5p 2. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are $AB = 4\,\text{cm}$, $BC = 3\,\text{cm}$ și $AA' = 12\,\text{cm}$. Distanța de la punctul A' la dreapta BD este egală cu:

A. $12\sqrt{5}$ cm **B.** $12\sqrt{26}$ cm **C.** $\frac{12\sqrt{26}}{5}$ cm **D.** $\frac{\sqrt{26}}{5}$ cm

5p **3** Piramida triunghiulară regulată $VABC$ are $VA = 8\,\text{cm}$, iar măsura unghiului dintre muchia laterală și planul bazei este egală cu 60°. Înălțimea VO a piramidei are lungimea de:

A. $4\sqrt{3}$ cm **B.** $4\sqrt{2}$ cm **C.** 4 cm **D.** $4\sqrt{5}$ cm

5p **4** Fie $ABCD$ un paralelogram și α un plan ce conține diagonala AC a paralelogramului. Dacă B' și D' sunt proiecțiile punctelor B, respectiv D pe planul α și $BB' = 5\,\text{cm}$, atunci lungimea segmentului DD' este egală cu:

A. $2,5$ cm **B.** 10 cm **C.** $5\sqrt{2}$ cm **D.** 5 cm

5p **5** Într-un tetraedru regulat, cosinusul unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei are valoarea:

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **C.** $\frac{1}{\sqrt{6}}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

5p **6** În cubul $POLIEDRU$, notăm cu A centrul feței $OLRD$. Tangenta unghiului format de dreapta PA cu planul (ORL) are valoarea:

A. $\sqrt{2}$ **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **C.** $\sqrt{3}$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de rezolvare scrieți rezolvările complete. (30 de puncte)

Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub, $AC \cap BD = \{O\}$, $AB = 4$ cm.

10p a) Calculați lungimea proiecției segmentului $D'O$ pe planul $(A'B'C')$.

10p b) Demonstrați că planele $(AD'O)$ și (BDD') sunt perpendiculare.

10p c) O furnică străbate distanța dintre punctele A și D', pe drumul minim situat pe suprafața laterală a cubului. Știind că drumul parcurs de furnică intersectează muchiile BB' și CC', arătați că lungimea acestui drum este mai mică de 13 cm.

* * *

5 ARII ȘI VOLUME ALE UNOR CORPURI GEOMETRICE

Lecția 1. Prisma dreaptă
Distanțe și unghiuri pe fețele sau în interiorul unei prisme drepte (cu baza triunghi echilateral, pătrat sau hexagon regulat), ale unui paralelipiped dreptunghic și ale unui cub

✓ Descrierea prismei drepte
Elementele prismei drepte
Tipuri de prismă dreaptă

Să ne amintim câteva definiții și proprietăți ale prismei drepte studiate de-a lungul capitolelor anterioare.

- Prisma dreaptă este un poliedru mărginit de: două suprafețe poligonale, numite bazele prismei; fețele laterale, care sunt suprafețe dreptunghiulare.
- Poligoanele ce formează bazele prismei sunt congruente, având laturile respectiv paralele, situate în plane paralele. Numărul fețelor laterale este egal cu numărul laturilor poligonului bazei.
- Din criteriul de perpendicularitate rezultă că o prismă este dreaptă dacă și numai dacă muchiile laterale sunt perpendiculare pe planul bazei.

Fețele laterale ale prismei drepte sunt perpendiculare pe planul bazei.

- Înălțimea unei prisme este distanța dintre planele bazelor. Cum în cazul prismei drepte, muchia laterală este perpendiculară pe planele bazelor, rezultă că înălțimea este egală cu lungimea muchiei laterale.

În *Figurile* 1, 2, 3 am reprezentat prisme drepte având ca baze poligoane regulate cu 3, 4 și 6 laturi; în *Figura* 4 am reprezentat un paralelipiped dreptunghic (adică o prismă dreaptă cu bazele dreptunghiulare), iar în *Figura* 5, un cub (adică un paralelipiped dreptunghic cu toate muchiile congruente).

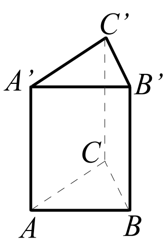


Figura 1

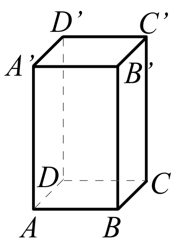


Figura 2

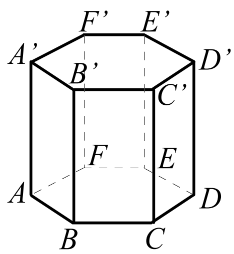


Figura 3

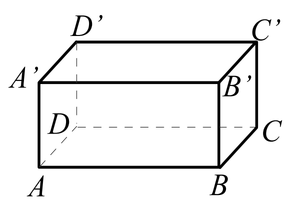


Figura 4

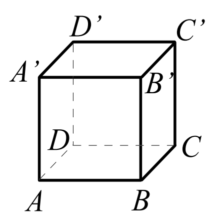


Figura 5

Pentru prisma din *Figura* 1, bazele sunt triunghiurile echilaterale congruente ABC și $A'B'C'$, cu $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$, $BC \parallel B'C'$. Fețele laterale sunt dreptunghiurile $ABB'A'$, $ACC'A'$ și $BCC'B'$. Muchiile laterale sunt AA', BB' și CC'. Avem $AA' \perp (ABC)$, $BB' \perp (ABC)$, $CC' \perp (ABC)$, $(ABB'A') \perp (ABC)$ etc. Înălțimea prismei este $h = AA'$. Prisma are 5 fețe (trei fețe laterale la care se adaugă două baze), 9 muchii (3 muchii laterale la care se adaugă muchiile celor două baze) și 6 vârfuri.

Temă pentru lucru în echipe Descrieți în mod asemănător prismele din *Figurile* 2, 3, 4, 5, punând în evidență elementele lor.

Fie $ABCDA'B'C'D'$, un paralelipiped dreptunghic. Segmentele AC', $A'C$, BD' și $B'D$ sunt diagonalele paralelipipedului. Acestea sunt congruente și se intersectează într-un punct care este mijlocul fiecărei diagonale (vezi *Figura* 6).

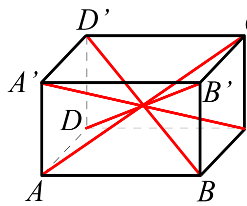
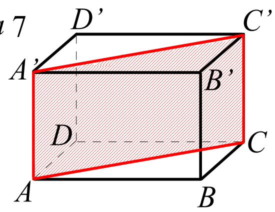


Figura 6

Figura 7



Dacă secționăm un paralelipiped cu un plan determinat de două muchii paralele care nu aparțin aceleiași fețe, secțiunea obținută se numește secțiune diagonală.

Astfel, în paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, planul dreptelor AA' și CC' determină secțiunea diagonală $ACC'A'$ care este un dreptunghi (vezi *Figura* 7).

Definiție

Prisma dreaptă cu baza un poligon regulat se numește prismă regulată.

✓ Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul prismei

1. $ABCA'B'C'$ este o prismă dreaptă cu bazele triunghiuri echilaterale.

- Proiecțiile punctelor A', B', C' pe planul (ABC) sunt, respectiv, punctele A, B și C.
- Deoarece muchiile laterale sunt perpenduculare pe planele bazelor, rezultă că planele fețelor laterale sunt perpendiculare pe planele bazelor.

$$(ABA') \perp (ABC),\ (ABA') \perp (A'B'C'), \ldots$$

- Deoarece $(BCB') \perp (ABC)$, rezultă că distanța de la A la (BCB') este egală cu distanța de la A la BC.
- Deoarece $AA' \perp (ABC)$, rezultă unghiul dintre AA' și BC este de 90°.
- Unghiul dintre două fețe laterale este unghiul dintre două muchii ale unei baze care sunt incluse, respectiv, în cele două fețe laterale.

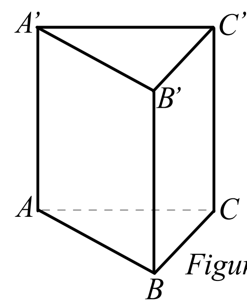


Figura 8

Exemplu Unghiul dintre (ABA') și (ACA') este unghiul dintre AB și AC care are măsura de 60°.

2. În *Figura* 9 $ABCDA'B'C'D'$ este o prismă dreaptă cu bazele pătrate (prismă patrulateră regulată).

- Fiecare muchie este perpendiculară pe planele fețelor cu care se intersectează.
- Proiecțiile punctelor A', B', C', D' pe (ABC) sunt, respectiv, punctele A, B, C și D. Proiecțiile punctelor A, B, B', A' pe planul feței $DCC'D'$ sunt, respectiv, punctele D, C, C' și D' etc.
- Oricare două fețe care au o muchie comună fac parte din plane perpendiculare.

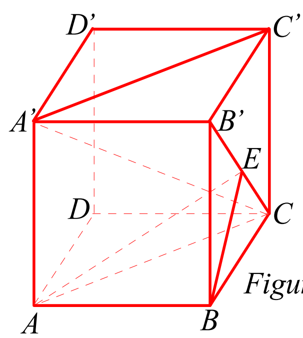


Figura 9

Exemple $(ADD'A') \perp (ABCD)$, $(ADD'A') \perp (DCC'D')$. Completați cu alte trei astfel de exemple.

- Unghiul dintre $(ACC'A')$ și $(ABB'A')$ este unghiul dintre AB și AC și are măsura 45°.
- Proiecția lui $A'C$ pe $(ABCD)$ este AC și deci unghiul dintre $A'C$ și $(ABCD)$ este unghiul $A'CA$.
- Dacă dorim să calculăm distanța de la A la $B'C$, ducem $BE \perp B'C$ și cum $AB \perp (BCB')$, rezultă conform teoremei celor trei perpendiculare că $AE \perp B'C$. Deci distanța de la A la $B'C$ este AE și se calculează cu teorema lui *Pitagora* din triunghiul dreptunghic ABE. $\left(BE = \dfrac{BC \cdot BB'}{B'C}\right)$.

Probleme rezolvate

1. În *Figura* 10 este reprezentat un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 6\sqrt{3}$ cm, $BC = 6$ cm și $AA' = 6\sqrt{2}$ cm.

Se cere: a) distanța de la A la $A'C$;
b) distanța de la A' la BC';
c) tangenta unghiului dintre $A'B$ și DC;
d) sinusul unghiului dintre $A'C$ și (ABA');
e) cosinusul unghiului dintre $(A'BC)$ și (ABC);
f) distanța de la A la $(A'BC)$.

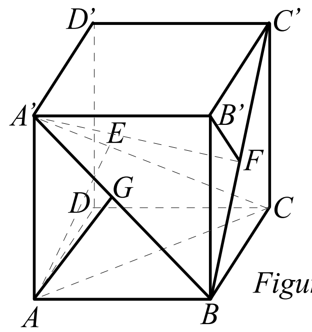


Figura 10

Soluție a) Ducem $AE \perp A'C$. $A'A \perp (ABC)$ și $AC \subset (ABC)$, rezultă $A'A \perp AC$.

$$AE = \frac{AA' \cdot AC}{A'C} = \frac{6\sqrt{2} \cdot 12}{6\sqrt{6}} = 4\sqrt{3} \text{ cm}.$$

b) $A'B' \perp (BCC'B')$, deducem $B'F \perp BC'$. Din $B'F, BC' \subset (BCC'B')$, rezultă $A'F \perp BC'$. $\Delta B'BC'$ - dreptunghic, rezultă $BC'^2 = B'B^2 + B'C'^2$, rezultă $BC' = 6\sqrt{3}$ cm.

$B'F = \dfrac{B'B \cdot B'C'}{BC'} = \dfrac{6\sqrt{2} \cdot 6}{6\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}$ cm. $\Delta A'B'F$ este dreptunghic în B', rezultă $A'F^2 = A'B'^2 + B'F^2$, rezultă $A'F = 2\sqrt{33}$ cm.

c) Din $DC \parallel AB$, rezultă $\sphericalangle(A'B;DC) = \sphericalangle(A'B;AB) = \sphericalangle A'BA$. În $\Delta ABA'$, avem $\operatorname{tg}\widehat{A'BA} = \dfrac{A'A}{AB} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

d) Proiecția lui $A'C$ pe (ABA') este $A'B$ deoarece $CB \perp (ABA')$. Unghiul dintre $A'C$ și (ABA') este unghiul dintre $A'C$ și $A'B$, adică $\sphericalangle BA'C$. Din triunghiul dreptunghic $A'BC$, avem $\sin\widehat{BA'C} = \dfrac{BC}{A'C} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

e) Avem: $(A'BC) \cap (ABC) = BC$, $A'B \perp BC$, $A'B \subset (A'BC)$, $AB \perp BC$ și $AB \subset ABC$. Din toate acestea rezultă că unghiul dintre $(A'BC)$ și (ABC) este unghiul dintre $A'B$ și AB, adică $\sphericalangle A'BA$.

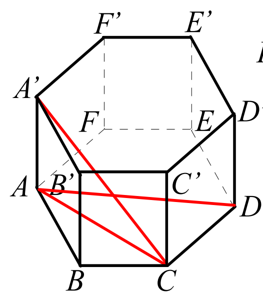
$$\cos\widehat{A'BA} = \frac{AB}{A'B} = \frac{6\sqrt{3}}{6\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

f) Din faptul că $BC \perp (ABA')$ și $BC \subset (A'BC)$, rezultă că $(ABA') \perp (A'BC)$. Deci distanța de la A la $(A'BC)$ este distanța de la A la $A'B$.

Fie $AG \perp A'B$. $AG = \dfrac{AB \cdot AA'}{A'B} = \dfrac{6\sqrt{30}}{5}$ cm.

2. În *Figura* 11 este reprezentată o prismă dreaptă cu bazele hexagonale regulate (prismă hexagonală regulată). Se știe că $AB = AA' = 12$ cm și se cere: a) distanța de la A' la CD;
b) măsura unghiului dintre $A'C$ și (ABC);
c) măsura unghiului dintre dreptele AB și $E'F'$;
d) măsura unghiului dintre planele a două fețe laterale alăturate;
e) distanța de la A la planul $(C'CD)$.

Figura 11



Soluție a) Avem: $A'A \perp (ABC)$, $AC \perp CD$ și $CD \subset (ACD)$.

Conform teoremei celor trei perpendiculare, rezultă că $A'C \perp CD$.

În triunghiul dreptunghic $A'AC$, avem $AA' = 12$ cm, $AC = 12\sqrt{3}$ cm și, folosind teorema lui *Pitagora*, obținem $A'C = 24$ cm. b) Proiecția lui $A'C$ pe (ABC) este AC. Deci unghiul dintre $A'C$ și (ABC) este unghiul dintre $A'C$ și AC care are măsura $30°$.

c) $F'E' \parallel FE$ și $FE \parallel BC$, rezultă $F'E' \parallel BC$, rezultă $\sphericalangle(AB;E'F') = \sphericalangle(AB;BC) = 60°$.

d) Fie $ABB'A'$ și $BCC'B'$ două fețe alăturate.

$(ABB') \cap (BCC') = BB'$, $AB \perp BB'$, $BC \perp BB'$, rezultă că unghiul dintre (ABB') și (BCC') este unghiul dintre dreptele AB și BC și acesta are măsura $60°$.

e) $AC \perp CD$ și $AC \perp CC'$, rezultă $AC \perp (C'CD)$. Deci distanța de la A la $(C'CD)$ este AC și are lungimea $12\sqrt{3}$ cm.

PROBLEME

1 Fie M și N mijloacele muchiilor AB și $D'C'$ ale cubului $ABCDA'B'C'D'$. Dacă $MN = 8\sqrt{2}$ cm, calculați:

a) muchia cubului; b) aria triunghiului ANC.

2 Desenați un cub. Cubul $ABCDA'B'C'D'$ are muchia $AB = 8$ cm.

a) Calculați aria triunghiului $A'BD$. b) Arătați că $AC' \perp A'O$, unde $\{O\} = AC \cap BD$.

3 Desenați un cub. În cubul $ABCDA'B'C'D'$, aria triunghiului DOB este egală cu $\sqrt{3}$ cm^2, unde $\{O\} =$ $= BC' \cap B'C$.

a) Arătați că $AB = 2$ cm.

b) Calculați valoarea cosinusului unghiului dintre dreptele DO și $A'B$.

4 Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic care are $AB = 6\sqrt{2}$ cm, $BC = 6$ cm și măsura unghiului $BA'C$ egală cu $30°$.

a) Arătați că $AA' = 6$ cm. b) Calculați distanța de la B la $A'C$.

c) Calculați distanța de la centrul feței $BCC'B'$ la planul $(A'BC)$.

5 Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ de bază $ABCD$ are $BA' = 6$ cm, $CA' = 9$ cm și $DA' = 7$ cm.

a) Calculați dimensiunile paralelipipedului.

b) Demonstrați că $A'B \perp BC$.

c) Calculați valoarea sinusului unghiului format de planele $(A'BC)$ și $(B'AD)$.

6 Prisma dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ are baza pătratul $ABCD$ cu $AB = 6$ cm și $AA' = 7$ cm.

a) Calculați aria patrulaterului $BCD'A'$.

b) Fie $\{O\} = AC \cap BD$. Calculați distanța de la O la diagonala $A'C$.

c) Fie $\{O'\} = A'D \cap AD'$. Calculați măsura unghiului determinat de dreptele OO' și BC.

7 Fie prisma dreaptă $ABCA'B'C'$ cu baza ABC, un triunghi echilateral. Latura bazei are lungimea de 24 cm și înălțimea prismei are lungimea de 12 cm.

a) Calculați sinusul unghiului dintre $A'B$ și $(A'AC)$.

b) Calculați distanța de la punctul A la planul $(A'BC)$.

c) Calculați valoarea sinusului unghiului dintre dreptele AB' și $A'C$.

8 Prisma dreaptă $ABCA'B'C'$ are baza ABC, un triunghi echilateral, având centrul de greutate punctul O. Distanța de la O la $A'B'$ este egală cu $\sqrt{37}$ cm și $AB = 12$ cm.

a) Calculați lungimea muchiei laterale.

b) Calculați valoarea tangentei unghiului determinat de planele (ABC) și $(A'B'O)$.

9 $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ este prismă dreaptă cu baza $ABCDEF$, hexagon regulat de centru O. Fețele laterale sunt pătrate. Dacă distanța de la O la $A'B'$ este egală cu $4\sqrt{7}$ cm, calculați:

a) lungimea muchiei laterale;

b) distanța de la A la planul $(A'CD)$.

Lecția 2. Arii și volume ale prismei drepte (cu baza triunghi echilateral, pătrat sau hexagon regulat) ale paralelipipedului dreptunghic și ale cubului

✓ Desfășurarea prismei drepte

Figurile 12, 13, 14 reprezintă desfășurarea suprafeței unei prisme drepte cu baza triunghi echilateral, pătrat, hexagon regulat cu latura bazei l și înălțimea h. *Figura* 15 reprezintă desfășurarea suprafeței unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile L, l, h, iar *Figura* 16 este desfășurarea unui cub cu muchia l.

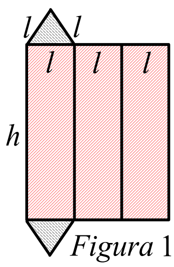


Figura 12

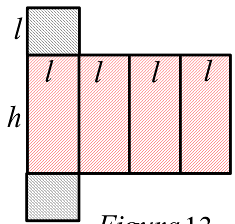


Figura 13

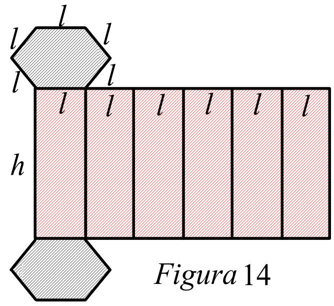


Figura 14

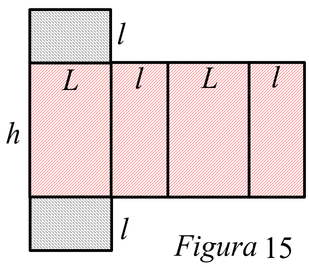


Figura 15

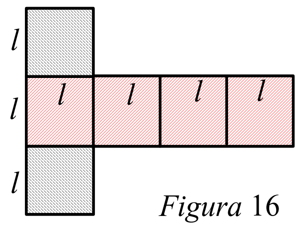


Figura 16

✓ Aria laterală și aria totală a prismei drepte

Definiție

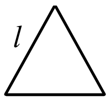
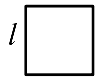
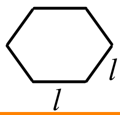
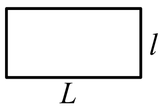
- Suma ariilor fețelor laterale ale unei prisme drepte se numește *aria laterală* a prismei.
- Suma ariilor tuturor fețelor unei prisme drepte se numește *aria totală* a prismei.

Aria laterală reprezintă aria suprafeței colorate cu roșu în fiecare dintre *Figurile* 12, 13, 14, 15, 16, iar bazele prismelor sunt suprafețele hașurate. Aria totală a unei prisme este egală cu aria desfășurării sale.

Notăm aria laterală cu $\mathcal{A}_l$, aria totală cu $\mathcal{A}_t$ și aria bazei cu $\mathcal{A}_b$. Între aria totală, aria laterală și aria bazei există relația evidentă $\boxed{\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b}$

Observăm că suprafața laterală (adică reuniunea fețelor laterale) a unei prisme drepte are ca desfășurare un dreptunghi având o dimensiune egală cu perimetrul bazei prismei (notat $\mathcal{P}_b$) și cealaltă dimensiune egală cu înălțimea prismei(notată h). Deci $\boxed{\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot h}$

Pentru a aplica aceste formule în cazurile concrete, folosim formulele cunoscute privind perimetrul și aria dreptunghiului, precum și formulele pentru perimetrele și ariile poligoanelor regulate cu 3, 4 și 6 laturi.

Poligonul	**Figura**	**Perimetrul**	**Aria poligonului**
Triunghiul echilateral de latură l		$3l$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$
Pătratul de latură l		$4l$	l^2
Hexagonul regulat de latură l		$6l$	$6\cdot\frac{l^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$
Dreptunghiul cu dimensiunile L și l		$2(L+l)$	Ll

În particular, aria totală a unui cub este $6l^2$, iar aria totală a unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile L, l și h, este $2(Ll+Lh+lh)$.

✓ Volumul prismei drepte

După cum în plan unei suprafețe poligonale îi corespunde un număr pozitiv reprezentând aria acestei suprafețe, în spațiu, fiecărui poliedru îi corespunde un număr pozitiv numit *volumul poliedrului*. Volumul arată cât loc ocupă în spațiu poliedrul considerat.

Unitatea de măsură pentru arie este aria pătratului a cărui latură este unitatea de lungime. Analog, unitatea de măsură pentru volum este volumul cubului a cărui muchie este egală cu unitatea de lungime.

Astfel, un cub cu latura de 1 m are volumul de $1\ \text{m}^3$, un cub cu latura de 1 cm are volumul de $1\ \text{cm}^3$.

Considerăm un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile $L = 3$ cm, $l = 2$ cm și $h = 2$ cm. Paralelipipedul se poate descompune în $3\cdot 2\cdot 2 = 12$ cuburi cu latura de 1 cm (vezi *Figura* 17).

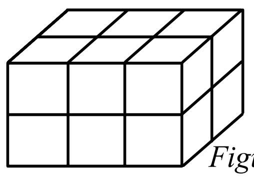


Figura 17

Cu alte cuvinte, unitatea de $1\ \text{cm}^3$ se cuprinde de 12 ori în volumul paralelipipedului dat, deci $\mathcal{V} = 12\ \text{cm}^3$.

Cele 12 cuburi au fost așezate în două straturi, de câte 6 cuburi, pentru că aria bazei paralelipipedului este $L\cdot l = 6\ \text{cm}^2$, iar înălțimea paralelipipedului este de 2 cm.

Volumul $\mathcal{V}$ al unei prisme drepte se calculează după formula $\boxed{\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h}$

În particular, volumul paralelipipedului dreptunghic cu dimensiunile L, l și h este $\mathcal{V} = L\cdot l\cdot h$, iar volumul cubului cu muchia l este $\mathcal{V} = l^3$.

Probleme rezolvate

1. În prisma dreaptă $ABCD'B'C'D'$ cu baza un pătrat, cunoaștem $A'C = 13$ cm și $AC = 12$ cm. Calculați aria laterală, aria totală și volumul prismei.

Soluție Cum $AC = AB\sqrt{2}$ și $AC = 12$ cm, obținem $AB = 6\sqrt{2}$ cm.

Deoarece $AA' \perp (ABCD)$, rezultă $AA' \perp AC$ și, din teorema lui *Pitagora*, $AA'^2 = A'C^2 - AC^2 = 13^2 - 12^2 = 25$, de unde $AA' = 5$ cm.

Rezultă: $\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b\cdot h = 4\cdot 6\sqrt{2}\cdot 5 = 120\sqrt{2}\ \text{cm}^2$. $\mathcal{A}_b = AB^2 = (6\sqrt{2})^2 = 72\ \text{cm}^2$.

$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b = 120\sqrt{2} + 2\cdot 72 = (120\sqrt{2} + 144)\ \text{cm}^2$. $\mathcal{V} = \mathcal{A}_b\cdot h = 72\cdot 5 = 360\ \text{cm}^3$.

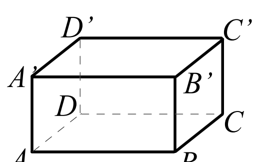


Figura 18

2. Secțiunea diagonală a unui cub are aria de $49\sqrt{2}$ cm^2. Calculați aria totală, volumul și diagonala cubului.

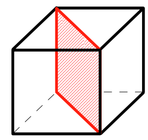


Figura 19

Soluție Notând cu l latura cubului, secțiunea diagonală este un dreptunghi cu dimensiunile l și $l\sqrt{2}$. Obținem $l^2\sqrt{2} = 49\sqrt{2}$, deci $l = 7$. Rezultă $\mathcal{A}_t = 6l^2 = 294$ cm^2 și $\mathcal{V} = l^3 = 343$ cm^3.

3. În *Figura* 20 este reprezentată desfășurarea unei prisme drepte cu baza un triunghi echilateral. Știind că $CC' = 10$ cm și $BM = 3\sqrt{7}$ cm, calculați aria laterală, aria totală și volumul prismei.

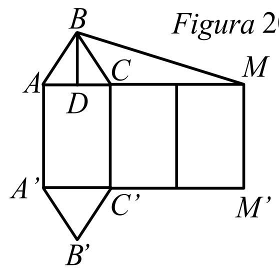


Figura 20

Soluție Notăm $AB = l$. Fie D, proiecția lui B pe AC. Avem $BD = \dfrac{l\sqrt{3}}{2}$ și $MD = 2l + \dfrac{l}{2} = \dfrac{5l}{2}$. Aplicând teorema lui *Pitagora* în triunghiul BDM, avem

$(3\sqrt{7})^2 = \left(\dfrac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{5l}{2}\right)^2$, de unde $l = 3$. Rezultă: $\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot h = 3 \cdot 3 \cdot 10 = 90$ cm^2.

$$\mathcal{A}_b = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2;\ \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\cdot\mathcal{A}_b = \left(90 + \frac{9\sqrt{3}}{2}\right)\text{cm}^2 . \mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = \frac{9\sqrt{3}}{4}\cdot 10 = \frac{45\sqrt{3}}{2}\text{ cm}^3.$$

4. Fie $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ o prismă dreaptă cu baza un hexagon regulat. Știind că $F'C = 10$ cm și $AC' = 2\sqrt{21}$ cm, calculați aria laterală, aria totală și volumul prismei.

Soluție Avem $FC' = F'C$ ca diagonale în dreptunghiul $CC'F'F$, deci $FC' = 10$ cm. În cercul circumscris hexagonului regulat $ABCDEF$, punctele C și F sunt diametral opuse, deci $\sphericalangle CAF = 90°$. Din $CC' \perp (ABC)$ și $CA \perp AF$, cu teorema celor trei perpendiculare, rezultă $C'A \perp AF$.
Deci $AF^2 = C'F^2 - C'A^2$, de unde $l = AF = 4$ cm, apoi $FC = 2l = 8$ cm.
Din triunghiul dreptunghic CAF, obținem $AC = 4\sqrt{3}$ cm, iar din triunghiul dreptunghic $CC'A$, rezultă $h = CC' = 6$ cm.

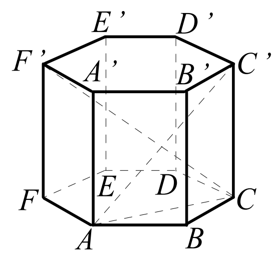


Figura 21

$\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot h = 6 \cdot 4 \cdot 6 = 144$ cm^2. $\quad \mathcal{A}_b = \dfrac{3l^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\cdot 16\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$ cm^2.

$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b = (144 + 48\sqrt{3})$ cm^2. $\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = 24\sqrt{3}\cdot 6 = 144\sqrt{3}$ cm^3.

PROBLEME

1 Aflați aria laterală, aria totală, volumul și diagonala unui cub cu latura de 4 cm.

2 Aria laterală a unui cub este 100 cm^2. Calculați aria totală și volumul cubului.

3 Volumul unui cub este de 216 cm^3. Calculați:
a) aria totală; b) aria secțiunii diagonale.

4 Aria secțiunii diagonale a unui cub este de $49\sqrt{2}$ cm^2. Calculați aria totală și volumul cubului.

5 În cubul $ABCDA'B'C'D'$, distanța de la B' la AD' este egală cu $2\sqrt{3}$ cm. Calculați diagonala și volumul cubului.

6 Copiați și completați tabelul alăturat în care l, h, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$ reprezintă latura bazei, înălțimea, aria laterală, aria totală și volumul unei prisme drepte cu baza un pătrat.

l	h	$\mathcal{A}_l$	$\mathcal{A}_t$	$\mathcal{V}$
3	4			
6		120		
	5	180		
12			$72(4\sqrt{3}+4)$	
		96	128	
		120		150

7 În cubul $ABCDA'B'C'D'$ punctul M este mijlocul laturii AB, iar $MD' = 6\,\text{cm}$.
a) Calculați aria laterală și volumul cubului.
b) Calculați distanța de la punctul C la planul $(MC'D')$.

8 Din cubulețe de volum $8\,\text{dm}^3$ formăm un cub cu aria totală $216\,\text{dm}^2$.
a) Câte cuburi mici folosim pentru a forma cubul mare?
b) Din fiecare vârf al cubului mare eliminăm un cubuleț. Aflați volumul și aria corpului rămas.

9 În *Figura* 22 este reprezentat un container pentru colectarea deșeurilor, având forma unui cub $ABCDA'B'C'D'$ din care lipsește baza superioară (capacul). Pentru confecționarea containerului s-au folosit $1125\,\text{dm}^2$ de tablă.
a) Arătați că lungimea muchiei este de $1,5\,\text{m}$.
b) Stabiliți dacă încape în container o vergea metalică, având lungimea $2,5\,\text{m}$.
c) O furnică merge pe suprafața laterală din A în C', pe drumul cel mai scurt. Știind că drumul său intersectează muchia BB' în M, aflați lungimea segmentului BM.

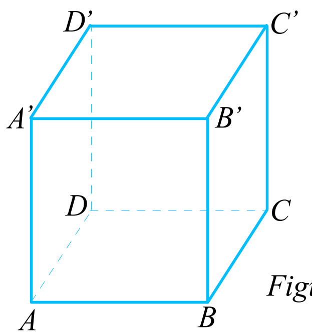


Figura 22

10 Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile 3 cm, 4 cm și 6 cm. Aflați aria totală, volumul și diagonala paralelipipedului.

11 Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu $AB = 4\,\text{cm}$, $BC = 3\,\text{cm}$ și măsura unghiului dintre AC' și (ABC) de 60°. Calculați aria totală și volumul paralelipipedului.

12 O piatră este pusă într-un vas cu apă în formă de paralelipiped dreptunghic cu lungimea 80 cm și lățimea 37,5 cm. Știind că astfel nivelul apei crește cu 1 cm, calculați volumul pietrei.

13 Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are $AB = 20\,\text{cm}$, $BC = 16\,\text{cm}$ și $AA' = 15\,\text{cm}$.
a) Calculați aria totală și diagonala paralelipipedului. b) Calculați $d(B, DC')$.
c) Fie Q un punct situat pe muchia AA'. Calculați AQ astfel încât perimetrul triunghiului $B'QD$ să fie minim.

14 Suma tuturor muchiilor unui paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ este egală cu 60 cm, iar lungimea diagonalei $AC' = 9\,\text{cm}$.
a) Calculați aria totală a paralelipipedului.
b) Dacă $A'C' \cap B'D' = \{O'\}$ și $AB = BC = 4\,\text{cm}$, calculați valoarea tangentei unghiului format de dreapta $O'A$ cu planul (DBB').

15 Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic și M mijlocul lui $A'D'$. Dacă $AB = 4a$, $BC = 2a$, $a > 0$ și aria triunghiului MBC egală cu $5a^2$, calculați: a) volumul paralelipipedului;
b) $d(B', AM)$; c) $d(A, (MBC))$.

16 Un rezervor în formă de paralelipiped dreptunghic are lungimea de 5 m, lățimea 4 m și înălțimea de 3 m.
a) Câți litri de apă încap în rezervor?
b) Dacă în rezervor sunt 24000 l de apă, la ce înălțime se ridică apa?
c) Dacă rezervorul este plin și evacuăm apa cu ajutorul unui robinet care are debitul de 240 litri pe minut, în cât timp golim rezervorul?

17 Pătratul $ABCD$ din *Figura* 23 ilustrează schematic o bucată de carton din care se confecționează o cutie fără capac în formă de paralelipiped dreptunghic. Pentru aceasta se decupează din cele patru colțuri ale cartonului pătrate cu latura x dm.
Știind că $AB = 10\,\text{dm}$ și $x \in [1; 5)$, aflați:
a) Volumul cutiei pentru $x = 2$.
b) Aria laterală a cutiei, în funcție de x.

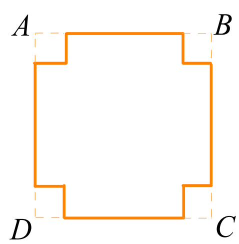


Figura 23

c) Valoarea lui x pentru care aria laterală a cutiei este maximă.

18 Un podium de premiere se obține prin lipirea a trei paralelipipede dreptunghice având bazele congruente și înălțimi diferite, ca în *Figura* 24. Se știe că $EM = 20$ cm, $AB = BC = CD = 60$ cm, $AH = 40$ cm, $TN = 30$ cm și $JR = 20$ cm.

a) Aflați înălțimea paralelipipedului corespunzător locului II.

b) Calculați aria suprafeței pânzei necesare pentru a îmbrăca părțile vizibile ale podiumului (se consideră că nu sunt pierderi la îmbinări).

c) O furnică se deplasează, în linie dreaptă, pe traseul $A \to I \to J \to S \to K \to M \to E$. Arătați că furnica parcurge mai mult de 292 cm.

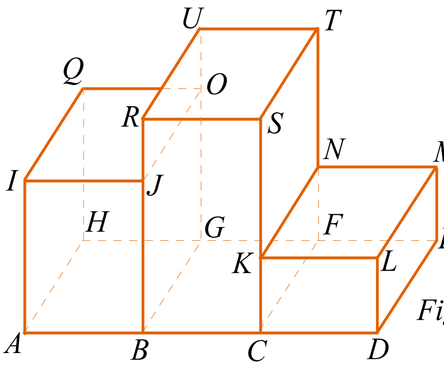


Figura 24

19 Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub. Dacă distanța de la B la planul $(A'C'D)$ este egală cu $4\sqrt{3}$ cm, calculați aria laterală, aria totală și volumul cubului.

20 În cubul $ABCDA'B'C'D'$ punctele M și N se află pe muchiile DD' și respectiv BB', astfel încât $MD' = BN = \frac{DD'}{4}$ și $MN = 2$ cm.

Calculați: a) volumul cubului;

b) distanța de la B la planul (ACB').

21 În cubul $ABCDA'B'C'D'$ aria totală și volumul sunt exprimate prin același număr, iar M este simetricul lui B față de AD.

a) Arătați că $MD \perp (D'DB)$.

b) Calculați distanța de la M la dreapta $D'B$.

22 Prisma dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ are ca bază pătratele $ABCD$ și $A'B'C'D'$, înălțimea $AA' = 9$ cm și diagonala $DB' = 3\sqrt{41}$ cm.

a) Calculați volumul prismei.

b) Calculați aria triunghiului ACD'.

c) Calculați distanța de la punctul B' la planul (ACD').

23 O prismă dreaptă cu baza un pătrat are latura bazei de 8 cm și măsura unghiului dintre diagonala prismei și planul bazei de $60°$. Calculați aria laterală și volumul prismei.

24 În prisma dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ cu baza $ABCD$ pătrat, avem $BC' \cap CB' = \{O\}$, $AB = 2$ cm și înălțimea $BB' = 2\sqrt{3}$ cm.

a) Calculați aria totală și volumul.

b) Arătați că $D'O = 2\sqrt{2}$ cm.

c) Demonstrați că triunghiul AOD' este dreptunghic.

d) Calculați valoarea sinusului unghiului format de dreapta AO și dreapta $B'D'$.

25 Prisma dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ are baza $ABCD$ un pătrat, aria laterală egală cu $100\sqrt{3}$ cm^2 și volumul egal cu $125\sqrt{3}$ cm^3.

a) Arătați că $AA' = 5\sqrt{3}$ cm.

b) Calculați distanța de la A la dreapta $B'C$.

c) Calculați măsura unghiului dintre planele (DCB') și (ABC).

d) Fie M un punct pe muchia BB'. Calculați BM astfel încât perimetrul triunghiului AMC' să fie minim.

26 Prisma patrulateră regulată $ABCDEFGH$ reprezintă o cutie de carton cu capac, având baza $ABCD$. Se știe că $AB = 20$ cm, $AE = 10$ cm, O este mijlocul segmentului EG și M este un punct pe BO, astfel încât distanța CM să fie minimă.

Se cere:

a) volumul cutiei;

b) aria suprafeței cartonului folosit pentru confecționarea cutiei, știind că aceasta este cu 10% mai mare decât aria totală a cutiei;

c) calculați lungimea segmentului CM.

27 O vază are forma unei prisme drepte cu baza un pătrat. Înălțimea vazei este de 40 cm, iar latura bazei este de 10 cm. În vază se toarnă 3 litri de apă.

a) Calculați aria laterală a vazei.

b) Determinați înălțimea la care se ridică apa în vază.

c) În vază se introduc patru cuburi de piatră, fiecare cub având muchia de 4 cm. Determinați cu câți centimetri crește nivelul apei din vază.

28 Vlad și-a construit în curtea casei o piscină în formă de prismă dreaptă cu baza un pătrat cu latura de 5 m. Când piscina este plină, conține 40 000 litri de apă.

a) Care este înălțimea piscinei?

b) Vlad dorește să placheze pereții laterali ai piscinei cu plăci dreptunghiulare de faianță cu dimensiunile 20 cm, respectiv 40 cm, iar podeaua cu plăci pătrate de gresie cu latura de 50 cm. Câte plăci de faianță și câte de gresie trebuie să cumpere?

29 Copiați și completați tabelul alăturat în care l, h, $\mathcal{A}_l$ $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$ reprezintă lungimile laturilor bazei, înălțimea, aria laterală, aria totală și volumul prismei drepte cu baza triunghi echilateral.

l	h	$\mathcal{A}_l$	$\mathcal{A}_t$	$\mathcal{V}$
6	8			
$2\sqrt{3}$		120		
		54	$6(9+\sqrt{3})$	
6		108		
		120		$40\sqrt{3}$

30 Prisma dreaptă $ABCA'B'C'$ cu baza ABC, triunghi echilateral, are $AB = 6$ cm și $AB' = 10$ cm. Calculați aria laterală și volumul prismei.

31 O prismă dreaptă cu baza un triunghi echilateral are raza cercului circumscris bazei de $2\sqrt{3}$ cm și volumul 135 cm^3.
Calculați aria totală a prismei.

32 Prisma dreaptă $ABCA'B'C'$ are baza ABC un triunghi echilateral și fețele laterale pătrate cu latura de $2\sqrt{2}$ cm. Calculați aria laterală și volumul prismei.

33 $ABCA'B'C'$ este o prismă dreaptă cu baza ABC un triunghi echilateral. Volumul prismei este egal cu $54\sqrt{3}\text{ cm}^3$. Muchiile AB și BB' sunt congruente, iar punctul M este mijlocul laturii AB. a) Arătați că $AB = 6$ cm.

b) Arătați că planele (MCB') și (ABB') sunt perpendiculare.

c) Calculați distanța de la punctul B la planul (MCB').

34 Prisma dreaptă $ABCA'B'C'$ are baza ABC un triunghi echilateral cu $AB = 10$ cm, $BB' = 5$ cm și punctul M este mijlocul lui $A'C'$.

a) Calculați aria totală și volumul prismei.

b) Determinați măsura unghiului dintre dreptele AA' și MB.

c) Calculați distanța de la M la planul $(BB'C)$.

35 Acoperișul unei clădiri, reprezentat schematic în *figura* 25, are forma unei prisme drepte $ABCDEF$ cu $AD = 10$ cm, $AB = 6$ cm și bazele triunghiuri echilaterale.

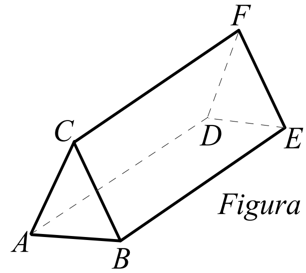


Figura 25

a) Calculați distanța de la C la AB.

b) Calculați volumul prismei $ABCDEF$.

c) Suprafețele $ADFC$ și $BEFC$ au fost acoperite cu tablă. Aria tablei cumpărată reprezintă 110% din aria suprafeței care a fost acoperită cu tablă. Determinați câți metri pătrați de tablă s-au cumpărat.

36 Prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ reprezintă un suport de creioane. Înălțimea suportului este de 12 cm, iar aria laterală a suportului este egală cu 288 cm^2.

a) Arătați că lungimea laturii bazei este de 8 cm.

b) Determinați unghiul dintre planele $(A'BC)$ și (ABC).

c) Un creion are un capăt în punctul A și celălalt capăt este mijlocul laturii $B'C'$. Demonstrați că lungimea creionului nu depășește 14 cm.

37 Un vas are formă de prismă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, în care latura bazei $AB = 24$ cm, iar muchia laterală $AA' = 63$ cm.

a) Aflați volumul vasului.

b) Putem pune 20 litri de apă în vas?

c) O furnică merge pe suprafața laterală a vasului pe traseul $A \to M \to C'$, $M \in BB'$, $BM = 18$ cm pe drumul cel mai scurt. Aflați lungimea drumului parcurs de furnică.

38 O prismă dreaptă cu baza un hexagon regulat are latura bazei egală cu 2 cm și înălțimea egală cu $\sqrt{3}$ cm. Calculați: a) aria laterală; b) aria totală; c) volumul prismei.

39 O prismă dreaptă cu o bază hexagon regulat are aria laterală egală cu $48\,cm^2$ și aria totală egală cu $48(1+\sqrt{3})\,cm^2$. Calculați volumul prismei.

40 Prisma dreaptă $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ are una dintre baze hexagon regulat $ABCDEF$ de latură $AB = 3$ cm. Înălțimea prismei este $AA' = 3\sqrt{3}$ cm, iar punctul S este mijlocul segmentului EB'.
a) Calculați aria laterală și volumul prismei. b) Calculați distanța de la S la dreapta AE'.

41 Se consideră o prismă dreaptă $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ având baza un hexagon regulat cu latura de 5 cm. Dacă măsura unghiului format de diagonala AC' cu planul bazei este 60°, aflați aria totală și volumul prismei.

TEST DE AUTOEVALUARE

Recomandat pentru portofoliu personal

10p din oficiu

SUBIECTUL I - Pe foaia de rezolvare scrieți numai rezultatele. (30 de puncte)

5p 1. Volumul unui cub cu diagonala de $3\sqrt{3}$ cm este . . . cm^3.

5p 2. O prismă triunghiulară regulată are muchia bazei $2\sqrt{3}$ dm și muchia laterală de 4 dm. Aria totală este . . . dm^2.

5p 3. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile 5 dm, 4 dm și 2 dm. Volumul paralelipipedului este . . . dm^3.

5p 4. O prismă patrulateră regulată are aria bazei $16\,cm^2$ și volumul $80\,cm^3$. Aria laterală a prismei este . . . cm^2.

5p 5. Pe un șantier se sapă o groapă în formă de paralelipiped dreptunghic, cu lungimea 6 m, lățimea 5 m și adâncimea 2 m. Pentru a nu se surpa, pe pereți se pun placaje. Aria placajului folosit are . . . m^2.

5p 6. Într-un vas în formă de prismă patrulateră regulată cu aria bazei $10\,dm^2$ și înălțimea 3 dm, se toarnă 25 litri de apă. Înălțimea până la care se ridică apa în vas este . . . dm.

SUBIECTUL al II-lea - Precizați litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

5p 1. Volumul unui cub este $27\,cm^3$. Aria totală a cubului este:

A. $27\,cm^2$ **B.** $36\,cm^2$ **C.** $54\,cm^2$ **D.** $45\,cm^2$

5p 2. Un paralelipiped dreptunghic are diagonala de $5\sqrt{2}$ cm și aria totală $94\,cm^2$. Suma lungimilor muchiilor paralelipipedului este:

A. 12 cm **B.** 48 cm **C.** 25 cm **D.** 47 cm

5p 3 O prismă triunghiulară regulată are aria laterală $60\,\text{cm}^2$ și aria totală $4(15+2\sqrt{3})\,\text{cm}^2$. Volumul prismei este:

A. $20\sqrt{3}\,\text{cm}^3$ **B.** $15\sqrt{6}\,\text{cm}^3$ **C.** $\frac{20\sqrt{3}}{3}\,\text{cm}^3$ **D.** $60\sqrt{3}\,\text{cm}^3$

5p 4 O bucată de brânză în formă de paralelipiped dreptunghic cu lungimea 18 cm, lățimea 12 cm și înălțimea 8 cm se taie în cuburi egale cu muchia exprimată printr-un număr natural de centimetri. Numărul maxim de cuburi poate fi:

A. 72 **B.** 216 **C.** 108 **D.** 1844

5p 5 O piscină are forma unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea 20 m, lățimea 10 m și adâncimea 2 m. Câte găleți cu vopsea sunt necesare pentru vopsirea interiorului piscinei, știind că o găleată de vopsea poate acoperi o suprafață de $10\,\text{m}^2$:

A. 32 **B.** 52 **C.** 20 **D.** 12

5p 6 O prismă patrulateră regulată are volumul $100\,\text{cm}^3$ și aria laterală $80\,\text{cm}^2$. Aria bazei este:

A. $5\,\text{cm}^2$ **B.** $20\,\text{cm}^2$ **C.** $25\,\text{cm}^2$ **D.** $40\,\text{cm}^2$

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de rezolvare scrieți rezolvările complete. (30 de puncte)

1 Un acvariu are formă de paralelipiped dreptunghic cu lungimea 60 cm, lățimea 40 cm și înălțimea 20 cm.

5p a) Până la ce înălțime se ridică apa, dacă se toarnă în acvariu 36 litri de apă?

5p b) Câte cuburi cu muchia de 10 cm încap în acvariul gol?

5p c) Dacă în acvariul plin cu apă sunt 49 de peștișori, demonstrați că în orice moment găsim doi peștișori astfel încât distanța dintre ei să fie mai mică decât $17,5\,\text{cm}$.

2 Fie $ABCA'B'C'$ o prismă dreaptă cu baza triunghiul echilateral ABC. Se știe că $AB=6\,\text{cm}$ și aria triunghiului $A'BC$ este $18\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. Calculați:

5p a) înălțimea prismei;

5p b) aria laterală și volumul prismei;

5p c) distanța de la A la $(A'BC)$.

*

* *

Lecția 3. Piramida regulată
Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul piramidei regulate
(cu baza triunghi echilateral, pătrat sau hexagon regulat)

✓ Descrierea piramidei regulate
Elementele piramidei regulate

Reamintim că o piramidă se numește *piramidă regulată* dacă baza ei este un poligon regulat, iar muchiile laterale sunt congruente. Am demonstrat anterior o condiție necesară și suficientă ca o piramidă să fie regulată.

Reține!

O piramidă este regulată dacă și numai dacă baza sa este un poligon regulat, iar proiecția vârfului pe planul bazei reprezintă centrul cercului circumscris poligonului bazei.

De aici rezultă un procedeu de a reprezenta în desen o piramidă regulată:

- desenăm în plan orizontal poligonul regulat ce reprezintă baza piramidei;
- în centrul cercului circumscris poligonului, ridicăm o perpendiculară pe planul poligonului și pe această perpendiculară fixăm vârful piramidei;
- unind acest vârf cu vârfurile poligonului bazei, obținem muchiile laterale ale piramidei.

În *Figurile* 26, 27, 28 am reprezentat o piramidă triunghiulară regulată, o piramidă patrulateră regulată și o piramidă hexagonală regulată.

Temă pentru lucru în echipe Descrieți piramidele din *Figurile* 26, 27, 28, punând în evidență vârfurile, fețele și muchiile. Justificați faptul că fețele laterale ale fiecărei piramide regulate sunt triunghiuri isoscele congruente.

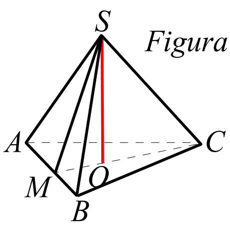


Figura 26

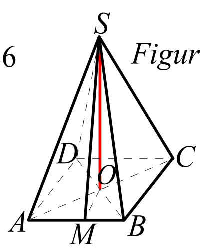


Figura 27

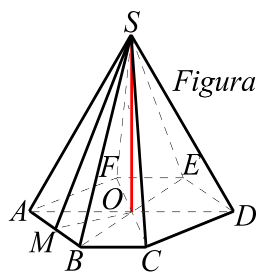


Figura 28

Definiție

Se numește *apotemă* a unei piramide regulate, înălțimea unei fețe laterale, dusă din vârful piramidei.

Notăm cu a_p, apotema piramidei, cu a_b, apotema bazei și cu h înălțimea. Fie M, mijlocul laturii AB într-o piramidă regulată cu vârful în S. Notăm cu O centrul cercului circumscris poligonului bazei.
Aplicând teorema lui *Pitagora* în triunghiul dreptunghic SOM, avem $SO^2 + OM^2 = SM^2$, adică: $\boxed{h^2 + a_b^2 = a_p^2}$

De exemplu, pentru un tetraedru regulat de muchie l, avem $a_p = \dfrac{l\sqrt{3}}{2}$ și $a_b = \dfrac{l\sqrt{3}}{6}$, și obținem $h = \dfrac{l\sqrt{6}}{3}$.

✓ Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul piramidei regulate (cu baza triunghi echilateral, pătrat, hexagon regulat)

1. În *Figura* 29, $VABC$ reprezintă o piramidă triunghiulară regulată cu baza ABC, iar punctele M, N, P sunt, respectiv, mijloacele segmentelor BC, AB și AC.

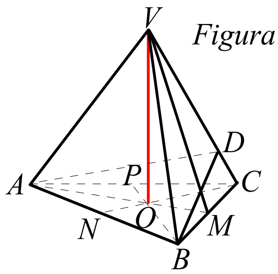


Figura 29

- Proiecțiile muchiilor laterale VA, VB, VC pe planul bazei (ABC) sunt, respectiv, segmentele AO, BO și CO. Deci unghiurile dintre muchiile laterale și planul bazei sunt $\widehat{VAO}, \widehat{VBO}$ și $\widehat{VCO}$.
- Deoarece $VM \perp BC$ și $OM \perp BC$, rezultă că unghiul dintre planul feței laterale VBC și planul bazei este unghiul VMO. Precizați unghiul dintre (VAB) și (ABC).
- Distanța de la centrul bazei la o muchie laterală se calculează ca înălțime într-un triunghi dreptunghic.

Exemplu Distanța de la O la VA este înălțimea din O a triunghiului dreptunghic VOA și este egală cu $\frac{VO \cdot AO}{VA}$. Precizați cum se calculează distanța de la O la VC.

- Deoarece $VM \perp BC$, $OM \perp BC$ și $BC \subset (VBC)$, rezultă că $(VOM) \perp (VBC)$ și deci distanța de la O la (VBC) este lungimea perpendicularei din O pe VM și este egală cu $\frac{VO \cdot OM}{VM}$. Spuneți cum se calculează distanța de la centrul bazei la (VAB).
- Deoarece $(VAM) \perp (VBC)$, rezultă că distanța de la A la (VBC) este distanța de la A la VM, care se calculează de obicei exprimând aria triunghiului VAM în două moduri, și anume: $\frac{VO \cdot AM}{2} = \frac{d(A; VM) \cdot VM}{2}$.
- În orice piramidă triunghiulară regulată, muchiile opuse sunt perpendiculare:
  $VA \perp BC$, $VB \perp AC$ și $VC \perp AB$. ($BC \perp (VAM)$ și $VA \subset (VAM)$, rezultă $BC \perp VA$).

Demonstrați că $VB \perp AC$.

- Deoarece $\Delta VBC \equiv \Delta VAC$, dacă ducem $BD \perp VC$, atunci și $AD \perp VC$, deci unghiul dintre planele fețelor VBC și VAC este unghiul dintre dreptele BD și AD.

2. În *Figura* 30, $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată cu înălțimea VO și apotema VM.

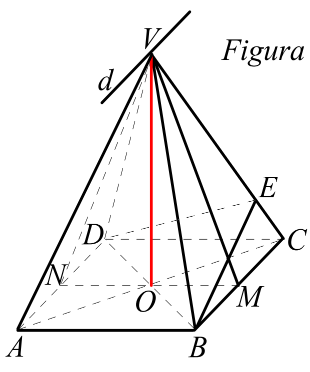


Figura 30

- Proiecțiile muchiilor laterale: VA, VB, VC și VD pe planul bazei sunt, respectiv, segmentele OA, OB, OC și OD. Deci unghiurile dintre muchiile laterale și planul bazei sunt: $\widehat{VAO}, \widehat{VBO}, \widehat{VCO}$ și $\widehat{VDO}$.
- Deoarece $VM \perp BC$ și $OM \perp BC$, rezultă că unghiul dintre planul feței laterale VBC și planul bazei este unghiul VMO.

Construiți unghiul dintre (VAB) și (ABC).

- Spunem despre fețele VAD și VBC că sunt fețe opuse. Din $BC \parallel AD$, $BC \subset (VBC)$, $AD \subset (VAD)$ și V este punct comun, rezultă că dreapta de intersecție a planelor (VAD) și (VBC) trece prin V și este paralelă cu BC. Ducem $VN \perp AD$ și fie $d = (VAD) \cap (VBC)$, rezultă $VM \perp d$ și $VN \perp d$. Deci unghiul dintre (VBC) și (VAD) este unghiul dintre VM și VN.
- Dacă $BE \perp VC$, atunci și $DE \perp VC$, deci unghiul dintre (VBC) și (VDC) este unghiul dintre BE și DE.
- Distanța de la centrul bazei la o muchie laterală, de exemplu de la O la VA, este înălțimea din O a triunghiului dreptunghic VOA și este egală cu $\frac{VO \cdot OA}{VA}$.
- Distanța de la centrul bazei la o față laterală, de exemplu de la O la (VBC), este distanța de la O la VM ($(VOM) \perp (VBC)$) și este egală cu $\frac{VO \cdot OM}{VM}$.

- Distanța de la A la (VBC) este dublul distanței de la O la (VBC), deoarece O este mijlocul segmentului AC și $C \in (VBC)$.
- Unghiul dintre VA și BC este unghiul dintre VA și AD $(AD \parallel BC)$, adică $\sphericalangle VAD$.

Probleme rezolvate

1. $VABC$ este o piramidă triunghiulară regulată cu latura bazei $AB = 18$ cm, $VA = 12$ cm, O este centrul bazei și $N \in VA$, $VN = 4$ cm. Calculați:

a) lungimile segmentelor VO și VM;

b) măsura unghiului dintre VA și (ABC);

c) arătați că $NO \parallel (VBC)$;

d) distanța de la N la (ABC);

e) tangenta unghiului dintre MN și (ABC);

f) distanța de la A la (VBC);

g) sinusul unghiului dintre VA și (VBC);

h) cosinusul unghiului dintre VM și AC.

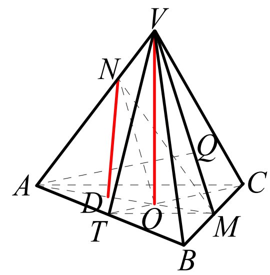


Figura 31

Soluție a) $AO = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{18\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm.

ΔVOA dreptunghic în O; $VO^2 = VA^2 - AO^2$, rezultă $VO = 6$ cm.

ΔVMB este dreptunghic în M, rezultă $VM^2 = VB^2 - BM^2$, rezultă $VM = 3\sqrt{7}$ cm.

b) $\sphericalangle[VA;(ABC)] = \sphericalangle(VA;AO) = \sphericalangle VAO = 30^\circ \left(VO = \frac{VA}{2}\right)$.

c) $\frac{VN}{VA} = \frac{MO}{MA} = \frac{1}{3}$. Rezultă conform reciprocei teoremei lui *Thales* că $NO \parallel VM$; $VM \subset (VBC)$ și $NO \not\subset (VBC)$, rezultă $NO \parallel (VBC)$.

d) Ducem $ND \parallel VO$ și cum $VO \perp (ABC)$, rezultă $ND \perp (ABC)$. În ΔVAO, $ND \parallel VO$, rezultă conform teoremei fundamentale a asemănării că $\Delta AND \sim \Delta AVO$, rezultă $\frac{ND}{VO} = \frac{AN}{AV} = \frac{AD}{AO}$, rezultă $ND = 4$ cm și $AD = 4\sqrt{3}$ cm.

e) Proiecția lui MN pe (ABC) este MD. Deci unghiul dintre MN și (ABC) este $\sphericalangle NMD$. tg $\sphericalangle NMD = \frac{ND}{DM} = \frac{4\sqrt{3}}{15}$.

f) Din $AM \perp BC$, $VM \perp BC$ și $BC \subset (VBC)$, rezultă $(VAM) \perp (VBC)$, rezultă $d[A;(VBC)] = d(A;VM) = AQ$.

$\mathcal{A}_{\Delta VAM} = \frac{AM \cdot VO}{2} = 27\sqrt{3}$ cm^2. $\mathcal{A}_{\Delta VAM} = \frac{VM \cdot AQ}{2} = \frac{3\sqrt{7} \cdot AQ}{2}$.

Deci $\frac{3\sqrt{7} \cdot AQ}{2} = 27\sqrt{3}$, rezultă $AQ = \frac{18\sqrt{21}}{7}$ cm.

g) Din $AQ \perp (VBC)$, rezultă proiecția lui VA pe (VBC) este VQ și unghiul dintre VA și (VBC) este $\sphericalangle AVQ$.

$\sin \sphericalangle AVQ = \frac{AQ}{AV} = \frac{3\sqrt{21}}{14}$.

h) MT este linie mijlocie în ΔABC, rezultă $MT \parallel AC$, rezultă $\sphericalangle(VM;AC) = \sphericalangle(VM;MT) = \sphericalangle VMT$. Deducem $VE \perp MT$, rezultă $ME = ET = \frac{MT}{2} = \frac{9}{2}$ cm. $\cos \widehat{VME} = \frac{ME}{VM} = \frac{3\sqrt{7}}{14}$.

2. $VABCDEF$ este o piramidă hexagonală regulată cu înălțimea $VO = 12$ cm, $VA = 8\sqrt{3}$ cm și VM este apotema piramidei. Calculați:

a) lungimile segmentelor AB și VM;

b) măsura unghiului dintre o muchie laterală și planul bazei;

c) sinusul unghiului dintre planul unei fețe laterale și planul bazei;

d) distanța de la O la (VAB);

e) distanța de la B la (VAD);

f) sinusul unghiului dintre (VAB) și (VDE).

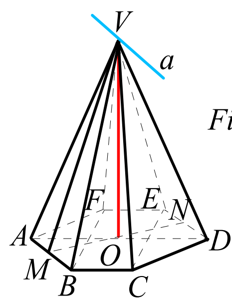


Figura 32

Soluție a) ΔVOA este dreptunghic în O, rezultă $AO^2 = VA^2 - VO^2$, rezultă $AO = 4\sqrt{3}$, rezultă $AB = 4\sqrt{3}$ cm.
ΔVMA este dreptunghic în M, rezultă $VM^2 = VA^2 - AM^2$, rezultă $VM = 6\sqrt{5}$ cm.

b) $\sphericalangle(VA;(ABC)) = \sphericalangle(VA;AO) = \sphericalangle VAO = 60^\circ \left(AO = \frac{VA}{2}\right)$.

c) $VM \perp AB$, $VM \subset (VAB)$, $OM \perp AB$, $OM \subset (ABC)$, rezultă $\sphericalangle((VAB);(ABC)) = \sphericalangle(VM;OM) = \sphericalangle VMO$.
$\sin \widehat{VMO} = \frac{VO}{VM} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

d) $OM \perp AB$, $VM \perp AB$ și $AB \subset (VAB)$, rezultă $(VOM) \perp (VAB)$, rezultă $d(O;(VAB)) = d(O;VM) = \frac{VO \cdot OM}{VM} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$ cm.

e) $VO \subset (VAD)$ și $VO \perp (ABC)$, rezultă $(VAD) \perp (ABC)$, rezultă $d(B;(VAD)) = d(B;AD) = \frac{BF}{2} = 6$ cm.

f) Din $AB \parallel DE$, $AB \subset (VAB)$, $DE \subset (VDE)$ și V este punct comun, rezultă că dreapta de intersecție a planelor (VAB) și (VDE) trece prin V și este paralelă cu AB. Fie $\{N\} = MO \cap DE$ și $a = (VAB) \cap (VDE)$.

Din $VM \perp AB$, $VN \perp DE$ și $a \parallel AB \parallel DE$, rezultă $VM \perp d$ și $VN \perp d$. Deci unghiul dintre (VAB) și (VDE) este unghiul dintre VM și VN, adică $\sphericalangle MVN$.

$\mathcal{A}_{\Delta MVN} = \frac{MN \cdot VO}{2} = 72\text{ cm}^2$; $\mathcal{A}_{\Delta AMN} = \frac{VM \cdot VN \sin \widehat{MVN}}{2} = 90 \sin \widehat{MVN}$. Se obține $\sin \widehat{MVN} = 0,8$.

PROBLEME

1 $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată, O este centrul bazei $ABCD$, M este mijlocul muchiei BC, iar N este mijlocul muchiei VC. Se știe că $AB = 12$ cm și aria triunghiului VBC este egală cu aria bazei.
Calculați:
a) lungimile segmentelor VO și VM;
b) tangenta unghiului dintre NO și BC;
c) distanța de la O la (VBC);
d) distanța de la N la (VBD);
e) tangenta unghiului dintre MN și (VAC).

2 $VABC$ este o piramidă triunghiulară regulată, O este centrul bazei ABC, D este mijlocul muchiei BC și E este mijlocul muchiei AB.
Dacă $AB = 12$ cm și $VA = 8$ cm, se cere:
a) lungimile segmentelor VO și VD;
b) să arătați că $DE \parallel (VAC)$;
c) unghiul dintre VA și BC;
d) tangenta unghiului dintre VD și AC;
e) distanța de la A la(VBC).

3 Piramida hexagonală regulată $VABCDEF$ cu vârful V are înălțimea $VO = 6$ cm și $AB = 12$ cm.
Calculați:
a) lungimea apotemei piramidei;
b) distanța de la A la (VCF);
c) sinusul unghiului dintre VA și VD;
d) măsura unghiului dintre (VBC) și (VEF).

4 Piramida triunghiulară regulată $ABCD$ are baza ABC cu $AB = 6$ cm și $AD = 5$ cm. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor AB, respectiv AD.
a) Calculați înălțimea și apotema piramidei.
b) Calculați sinusul unghiului dintre dreapta MN și dreapta DC.
c) Calculați lungimea proiecției segmentului MN pe planul (ABC).

5 Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are lungimea înălțimii VO egală cu lungimea laturii BC a pătratului $ABCD$ și M este mijlocul laturii BC. Dacă $VM = 4\sqrt{5}$ cm, calculați: a) înălțimea VO;
b) distanța de la O la planul (VBC);
c) distanța de la O la VB.

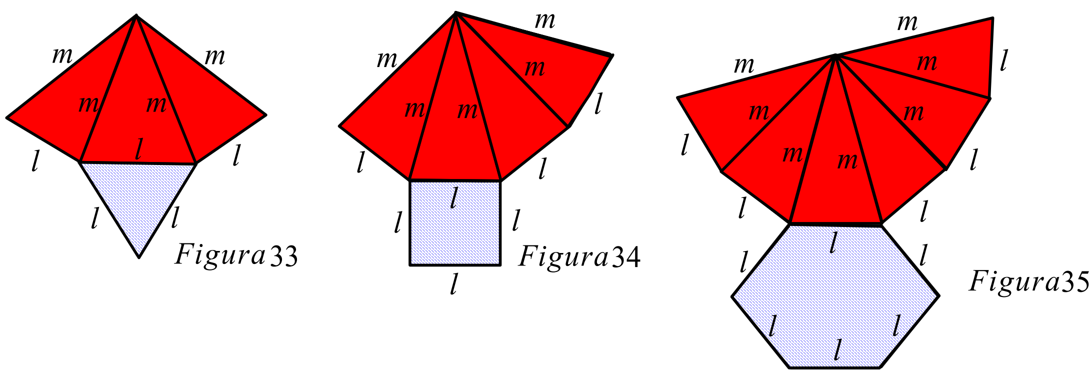
6 O piramidă patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful V are $AB = VO = 10$ cm, unde $AC \cap BD = \{O\}$.
Calculați: a) apotema piramidei;
b) distanța de la A la (VBC) ;
c) distanța de la mijlocul lui VA la planul (VBC).

7 Piramida patrulateră regulată $VABCD$, de vârf V are aria laterală egală cu 288 cm^2 și unghiul dintre planele (VBC) și (VAD) are măsura de 60°. Calculați:
a) măsura unghiului dintre planele (VBC) și (ABC);
b) înălțimea piramidei;
c) valoarea tangentei unghiului format de muchia laterală cu planul bazei;
d) distanța de la mijlocul înălțimii VO la planul (VBC).

Lecția 4. Aria și volumul piramidei regulate cu baza triunghi echilateral, pătrat sau hexagon regulat

✓ Desfășurarea piramidei regulate

Figurile 33, 34 și 35 reprezintă desfășurările suprafețelor unei piramide triunghiulare regulate, ale unei piramide patrulatere regulate și ale unei piramide hexagonale regulate, având lungimea muchiei bazei l și lungimea muchiei laterale m.



✓ Aria laterală și aria totală a piramidei regulate

Definiție

- Suma ariilor fețelor laterale ale unei piramide se numește *aria laterală* a piramidei. (Suprafața colorată cu roșu).
- Suma ariilor tuturor fețelor unei piramide se numește *aria totală* a piramidei.

Notăm aria laterală cu $\mathcal{A}_l$, aria totală cu $\mathcal{A}_t$ și aria bazei cu $\mathcal{A}_b$.

Între aria totală, aria laterală și aria bazei există relația evidentă: $\boxed{\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b}$

Deoarece fețele laterale ale unei piramide regulate sunt triunghiuri congruente, ariile lor sunt egale. Aria unei fețe laterale este $\frac{l \cdot a_p}{2}$. Deci, pentru o piramidă a cărei bază este un poligon cu n laturi, avem $\mathcal{A}_l = \frac{n \cdot l \cdot a_p}{2}$.

Cum $n \cdot l = \mathcal{P}_b$ (perimetrul bazei), obținem formula: $\boxed{\mathcal{A}_l = \frac{\mathcal{P}_b \cdot a_p}{2}}$

În particular, aria laterală a unui tetraedru regulat este $3 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ iar aria totală este $4 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = l^2\sqrt{3}$.

✓ Volumul piramidei regulate

Volumul $\mathcal{V}$ al unei piramide se calculează după formula $\boxed{\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_b \cdot h}{3}}$ unde am notat cu $\mathcal{A}_b$ aria bazei și cu h, înălțimea piramidei.

✓ Secțiuni paralele cu baza în piramidă

Fie $SBAC$ o piramidă și planul α paralel cu (ABC) care intersectează muchiile SA, SB și SC în punctele A', B', C'. Atunci suprafața triunghiulară $A'B'C'$ reprezintă secțiunea determinată de planul α în piramida considerată (vezi *Figura* 36). Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt asemenea, raportul de asemănare k fiind egal cu raportul înălțimilor piramidelor $SA'B'C'$ și $SABC$ sau cu raportul muchiilor corespunzătoare, adică avem:

$$k=\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'A'}{CA}=\frac{SO'}{SO}=\frac{SA'}{SA}=\frac{SB'}{SB}=\frac{SC'}{SC}$$

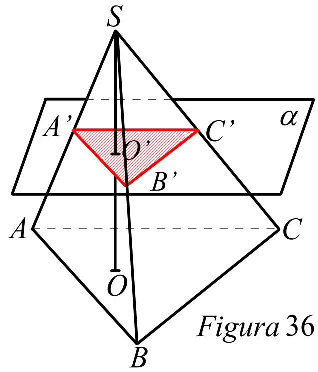


Figura 36

În aceste condiții, spunem că piramidele $SA'B'C'$ și $SABC$ sunt asemenea, raportul de asemănare fiind k. Să calculăm raportul volumelor celor două piramide.

$$\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}}=\frac{\dfrac{A_{\Delta A'B'C'}\cdot SO'}{3}}{\dfrac{A_{\Delta ABC}\cdot SO}{3}}=\frac{A_{\Delta A'B'C'}}{A_{\Delta ABC}}\cdot\frac{SO'}{SO}.$$ Dar $\frac{SO'}{SO}=k$, iar raportul ariilor a două poligoane asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare, adică $\frac{A_{\Delta A'B'C'}}{A_{\Delta ABC}}=k^2$. Rezultă $\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}}=k^3$.

Considerațiile de mai sus sunt valabile pentru o secțiune paralelă cu baza în orice piramidă.

Temă pentru lucru în echipe Demonstrați că raportul ariilor laterale ale piramidelor $SA'B'C'$ și $SABC$ este egal cu k^2.

Reține!

Secționând o piramidă printr-un plan paralel cu baza, se obține o piramidă asemenea cu piramida dată. Raportul volumelor celor două piramide este egal cu cubul raportului de asemănare, iar raportul ariilor laterale (totale) este egal cu pătratul raportului de asemănare.

Probleme rezolvate

1 O piramidă triunghiulară regulată $SBAC$ are înălțimea de 8 cm, iar raza cercului înscris în triunghiul ABC este de 6 cm. Calculați:

a) apotema piramidei;
b) aria laterală și aria totală a piramidei;
c) volumul piramidei;
d) distanța de la punctul A la planul (SBC).

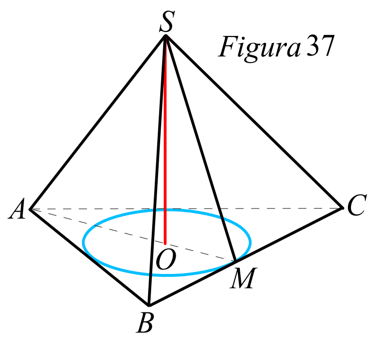


Figura 37

Soluție a) Fie M, mijlocul laturii BC. Raza OM a cercului înscris în triunghiul ABC reprezintă apotema bazei (vezi *Figura* 37). Rezultă $a_p^2=a_b^2+h^2=100$, deci $a_p=10\,\text{cm}$.

b) Avem $AM=3\cdot OM=18\,\text{cm}$, dar $AM=\frac{l\sqrt{3}}{2}$, de unde $l=12\sqrt{3}$ cm.

$$\mathcal{A}_l=\frac{P_b\cdot a_p}{2}=180\sqrt{3}\text{ cm}^2;\qquad \mathcal{A}_b=\frac{l^2\sqrt{3}}{4}=108\sqrt{3}\text{ cm}^2;\qquad \mathcal{A}_t=\mathcal{A}_l+\mathcal{A}_b=288\sqrt{3}\text{ cm}^2.$$

c) $\mathcal{V}=\frac{A_b\cdot h}{3}=\frac{108\sqrt{3}\cdot 8}{3}=288\sqrt{3}\text{ cm}^3$.

d) Notăm distanța cerută cu x. Considerând fața SBC ca bază a piramidei, avem $\mathcal{V}=\frac{A_{\Delta SBC}\cdot x}{3}$, dar $A_{\Delta SBC}=\frac{BC\cdot SM}{2}=60\sqrt{3}$. Din $288\sqrt{3}=\frac{60\sqrt{3}\cdot x}{3}$, $x=14,4\,\text{cm}$.

2 Dintr-o foaie de tablă pătrată $ABCD$ cu latura de 6 dm se confecționează o piramidă patrulateră cu baza $MNPQ$. Pentru aceasta, se înlătură triunghiurile AMB, BNC, CPD și DAQ, unde $MA = MB = NB = NC = PC = PD = QD = QA$ și $\sphericalangle AMB = 120^\circ$. Arătați că partea rămasă reprezintă desfășurarea unei piramide regulate și calculați aria laterală, aria totală și apotema piramidei (vezi *Figura* 38).

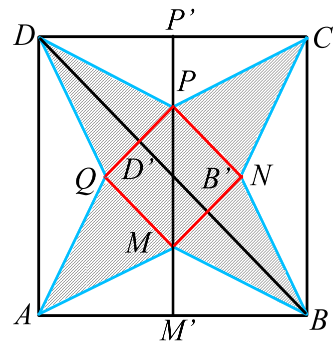


Figura 38

Soluție Triunghiurile MAB, NBC, PCD și QDA sunt congruente conform cazului L.L.L. Aceste triunghiuri sunt isoscele cu unghiurile de la bază de 30°.

Triunghiurile QAM, MBN, NCP și PDQ sunt congruente conform cazului L.U.L. și isoscele cu unghiurile de la vârf de 30°, deci cu unghiurile de la bază de 75°. Rezultă că $MN = NP = PQ = QM$ și $\sphericalangle QMN = 360^\circ - 120^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 90^\circ$. $MNPQ$ este romb cu un unghi drept, deci este pătrat.

Suprafața hașurată reprezintă desfășurarea unei piramide patrulatere regulate având ca bază pătratul $MNPQ$ și muchiile laterale congruente. Fie M' proiecția lui M pe AB și P' proiecția lui P pe CD. În triunghiul AMM', avem $MM' = AM' \operatorname{tg} 30^\circ = \sqrt{3}$ cm și $AM = 2MM' = 2\sqrt{3}$ cm. Notăm $MN = l$. Din $M'P' = MM' + MP + PP'$, obținem $6 = 2 \cdot \sqrt{3} + l\sqrt{2}$, de unde $l = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}$. Obținem $\mathcal{A}_b = (3\sqrt{2} - \sqrt{6})^2 = (24 - 12\sqrt{3})\,\text{cm}^2$. Aria triunghiului ABM este $\dfrac{AB \cdot MM'}{2} = \dfrac{6 \cdot \sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ cm^2. Aria totală a piramidei este $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_{ABCD} - 4\,\mathcal{A}_{\Delta MAB} = 36 - 4 \cdot 3\sqrt{3} = 36 - 12\sqrt{3}$, deci aria laterală este $36 - 12\sqrt{3} - (24 - 12\sqrt{3}) = 12\,\text{cm}^2$. BD taie MN în B' și PQ în D'. Atunci $BB' = DD' = a_p$ (apotema piramidei). Din $BD = BB' + B'D' + DD'$, obținem $6\sqrt{2} = 2a_p + 3\sqrt{2} - \sqrt{6}$, de unde $a_p = \dfrac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$.

3 Fie $SABCDEF$ o piramidă hexagonală regulată cu $AB = 10\,\text{cm}$ și măsura unghiului ASD de 60°.

Calculați:

a) aria laterală și aria totală a piramidei;

b) volumul piramidei;

c) distanța de la centrul bazei piramidei la o muchie laterală.

Soluție a) Triunghiul SAD este echilateral cu $AD = 2 \cdot AB = 20\,\text{cm}$. Notăm cu M mijlocul lui AB.

Cum înălțimea piramidei este $h = SO = \dfrac{AD \cdot \sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$, obținem $SM^2 = SO^2 + OM^2 = (10\sqrt{3})^2 + (5\sqrt{3})^2 = 375$, deci apotema piramidei este $a_p = SM = 5\sqrt{15}$ cm.

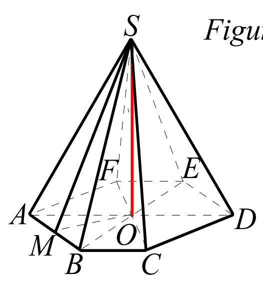


Figura 39

Rezultă $\mathcal{A}_l = \dfrac{6 \cdot l \cdot a_p}{2} = 150\sqrt{15}$ cm^2, $\mathcal{A}_b = \dfrac{3l^2\sqrt{3}}{2} = 150\sqrt{3}$ cm^2

și $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b = 150(\sqrt{15} + \sqrt{3})\,\text{cm}^2$.

b) $\mathcal{V} = \dfrac{\mathcal{A}_b \cdot h}{3} = \dfrac{150\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{3}}{3} = 1500\,\text{cm}^3$.

c) $d(O, SA) = \dfrac{SO \cdot OA}{SA} = \dfrac{10\sqrt{3} \cdot 10}{20} = 5\sqrt{3}$ cm.

PROBLEME

1 Copiați și completați tabelul de mai jos, unde L, h, m, a_p, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$ reprezintă respectiv: latura bazei, înălțimea, muchia laterală, apotema, aria laterală, aria totală și volumul piramidei triunghiulare regulate.

L	h	m	a_p	$\mathcal{A}_l$	$\mathcal{A}_t$	$\mathcal{V}$
6	3					
2		$\sqrt{13}$				
		13	12			
$2\sqrt{3}$				$9\sqrt{3}$		
				$75\sqrt{3}$	$100\sqrt{3}$	
	$4\sqrt{6}$					$144\sqrt{2}$

2 Calculați aria laterală, aria totală și volumul unei piramide triunghiulare cu toate muchiile congruente egale cu $12\sqrt{3}$ cm.

3 Piramida triunghiulară regulată $SABC$ are baza triunghiul ABC, M este mijlocul muchiei BC, $SA = 12\sqrt{2}$ și $\sphericalangle ASM = 90^\circ$.
a) Calculați aria laterală și volumul piramidei.
b) Calculați distanța de la mijlocul segmentului AM la planul (SBC).
c) Calculați lungimea celui mai scurt drum dintre punctele A și M pe suprafața laterală a piramidei.

4 Calculați volumul unei piramide cu toate muchiile congruente, știind că desfășurarea sa este un triunghi echilateral cu aria egală cu $16\sqrt{3}$ cm^2.

5 Piramida triunghiulară regulată $VABC$ are muchiile congruente. Înălțimea piramidei este VO, punctul M este proiecția punctului O pe muchia VB și $MC == 2\sqrt{7}$ cm.
a) Arătați că $BC = 6$ cm.
b) Calculați volumul piramidei.
c) Calculați sinusul unghiului dintre dreapta MC și planul (VOC).

6 Din șase bețișoare cu aceeași lungime, lipindu-le între ele la capete, construiți patru triunghiuri echilaterale.

7 În piramida triunghiulară regulată $VABC$, înălțimea VO are lungimea egală cu 12 cm, iar distanța de la punctul O la planul (VBC) este egală cu 7,2 cm.
a) Arătați că $AB = 18\sqrt{3}$ cm.
b) Calculați volumul piramidei $VABC$.
c) Știind că punctele G_1, G_2, G_3 sunt centrele de greutate ale fețelor VAB, VAC, respectiv VBC, calculați volumul piramidei regulate $VG_1G_2G_3$.

8 Fie piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu baza ABC. Înălțimea piramidei este de 12 cm și măsura unghiului format de planul bazei cu o față laterală 60°. a) Calculați aria totală a piramidei.
b) La ce distanță de planul bazei trebuie dus un plan paralel cu planul bazei, astfel încât piramida mică formată să aibă volumul egal cu $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$cm^3?

9 La un atelier de creație, Mihai construiește, din trei plăcuțe de plastic în formă de triunghi isoscel, cu latura bazei 12 cm și înălțimea corespunzătoare bazei de 8 cm, și dintr-o plăcuță în formă de triunghi echilateral cu latura de 12 cm, o piramidă triunghiulară regulată.
a) Care a fost suprafața materialului de plastic necesară pentru confecționarea piramidei? *Aproximați la întreg*!
b) Înainte de a adăuga baza piramidei, Mihai verifică dacă au fost făcute bine lipiturile fețelor laterale. Pentru aceasta el dorește să umple interiorul piramidei cu apă. I-a fost suficient un pahar de 125 ml plin cu apă?

10 Cutiile pentru laptele primit de elevii unei școli au forma unui tetraedru regulat cu muchia de 1 dm. a) Calculați aria suprafeței materialului necesar pentru o cutie.

b) Câți mililitri de lapte conține o cutie?

(Se ia pentru $\sqrt{2}$ valoarea aproximativă $1,41$.)

11 O piramidă hexagonală regulată are aria bazei de $32\sqrt{3}$ dm^2 și volumul de $128\,\text{dm}^3$. Calculați aria laterală a piramidei și măsura unghiului unei fețe laterale cu planul bazei.

12 Piramida hexagonală regulată $VABCDEF$, de vârf V, are aria laterală egală cu $48\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ și apotema piramidei de lungime $4\sqrt{3}$ cm.
Calculați volumul piramidei și sinusul unghiului format de planul (VBD) cu planul bazei.

13 Copiați și completați tabelul de mai jos, unde L, h, m, a_p, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$ reprezintă respectiv: latura bazei, înălțimea, muchia laterală, apotema piramidei, aria laterală, aria totală, și volumul unei piramide patrulatere regulate.

L	h	m	a_p	$\mathcal{A}_l$	$\mathcal{A}_t$	$\mathcal{V}$
$4\sqrt{2}$			3			
	5	10				
18				540		
	3					64
4						32
				2320	3920	

14 O piramidă patrulateră regulată are latura bazei de $2\sqrt{3}$ cm și unghiul unei fețe laterale cu planul bazei de 60°. Calculați aria totală și volumul piramidei.

15 O piramidă patrulateră regulată are toate muchiile congruente și aria laterală de $16\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. Calculați volumul piramidei și măsura unghiului dintre o muchie laterală și planul bazei.

16 O piramidă patrulateră regulată are apotema de $4\sqrt{7}$, iar muchia laterală formează cu planul bazei un unghi de 60°. Calculați:
a) volumul piramidei;
b) distanța de la centrul bazei la o față laterală.

17 În piramida patrulateră regulată $VABCD$ de bază $ABCD$, latura bazei are lungimea de 12 cm, iar unghiul dintre planele (VAC) și (VBC) are măsura de 60°. a) Arătați că $BD \perp (VAC)$;
b) Calculați volumul piramidei.
c) Aflați măsura unghiului dintre planele (VBC) și (VCD).
d) Calculați distanța de la punctul A la planul (VBC).

18 Un elev construiește din sârmă un model de piramidă patrulateră $VABCD$ cu toate muchiile congruente.
Pentru acest model elevul a folosit 96 cm de sârmă.
a) Calculați aria totală a piramidei $VABCD$.
b) Determinați înălțimea piramidei $VABCD$.

19 Într-un camping un cort are forma unei piramide patrulatere regulate cu vârful S și baza $MNPQ$. Se cunoaște aria triunghiului SMN de $12\sqrt{3}$ m^2 și $SM = MN$.
a) Să se afle înălțimea cortului.
b) Calculați câți m^2 de pânză de cort sunt necesari pentru confecționarea cortului (se știe că și baza cortului este confecționată din același material).
c) Aflați volumul aerului din cort.

20 Dintr-o bucată de lemn în formă de piramidă patrulateră regulată $SABCD$, un sculptor și-a conceput lucrarea eliminând două piramide patrulatere regulate $SMNPQ$ și $OMNPQ$. Se știe că triunghiul SAC este echilateral de latura $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ m și că punctele M, N, P, Q sunt mijloacele muchiilor piramidei $SABCD$. Calculați:
a) înălțimea SO a piramidei;
b) volumul corpului eliminat;
c) aria totală a corpului rămas.

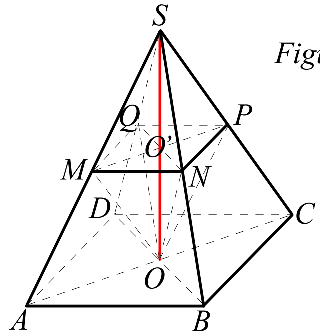


Figura 40

21 Copiați și completați tabelul de mai jos, unde L, h, m, a_p, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$ reprezintă respectiv: latura bazei, înălțimea, muchia laterală, apotema piramidei, aria laterală, aria totală și volumul unei piramide hexagonale regulate.

L	h	m	a_p	$\mathcal{A}_l$	$\mathcal{A}_t$	$\mathcal{V}$
$2\sqrt{3}$			5			
2	1					
		4				$28\sqrt{3}$
$2a$		$2a\sqrt{2}$				

TEME DE SINTEZĂ

Recomandate pentru lucru în echipe

1 Într-un acvariu cu dimensiunile de 2 dm, 3 dm și 4 dm înoată 25 de peștișori. Demonstrați că în orice moment există cel puțin doi peștișori la distanță mai mică decât 18 cm.

2 Un diamant are forma unui tetraedru regulat cu muchia de 3 cm. Diamantul este ambalat într-o cutiuță cubică cu muchia de 4 cm.

a) Calculați volumul diamantului.
b) Calculați raportul dintre aria bazei diamantului și aria bazei cutiei.
c) Cât la sută din volumul cutiei reprezintă volumul diamantului?

3 a) Aria unei fețe laterale a piramidei lui *Keops* este egală cu aria unui pătrat având latura egală cu înălțimea piramidei. Demonstrați că raportul dintre apotema piramidei și apotema bazei este egal cu $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (numărul de aur).

b) Se notează $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ cu litera grecească ϕ. Considerăm șirul $1, \phi, \phi^2, \phi^3, \ldots$. Demonstrați că fiecare termen al șirului, începând cu al treilea, este egal cu suma celor doi termeni dinaintea lui.

TEST DE AUTOEVALUARE

Recomandat pentru portofoliu personal

10p din oficiu

SUBIECTUL I - Pe foaia de rezolvare scrieți numai rezultatele. (30 de puncte)

5p 1. Desfășurarea suprafeței totale a unui tetraedru regulat este un triunghi echilateral cu latura 6 cm. Aria totală a tetraedrului este $\ldots$ cm^2.

5p 2. Volumul unei piramide hexagonale regulate este $1080\,\text{cm}^3$, iar muchia bazei este $1,2\,\text{dm}$. Înălțimea piramidei este . . . cm.

5p 3. Secțiunea diagonală a unei piramide patrulatere regulate este un triunghi dreptunghic isoscel cu aria $2\,\text{dm}^2$. Volumul piramidei este . . . dm^3.

5p 4. O piramidă triunghiulară regulată are muchia bazei de 6 cm și unghiul dintre o față laterală și planul bazei 60°. Aria laterală a piramidei este . . . cm^2.

5p 5. O piramidă patrulateră regulată are muchia laterală $20\sqrt{3}$ cm și înălțimea 2 dm. Aria bazei este . . . dm^2.

5p 6. Dacă aria laterală a unui tetraedru regulat este $12\sqrt{3}$ cm^2, aria bazei este . . . cm^2.

SUBIECTUL al II-lea - Precizați litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

5p 1. Înălțimea unui tetraedru regulat este $3\sqrt{6}$ cm. Aria totală a tetraedrului este egală cu:

A. $12\sqrt{6}$ cm^2 **B.** $\frac{81\sqrt{3}}{4}$ cm^2 **C.** $\frac{243\sqrt{3}}{4}$ cm^2 **D.** $81\sqrt{3}$ cm^2

5p 2. O piramidă patrulateră regulată cu toate muchiile egale are aria laterală $16\sqrt{3}$ cm^2. Aria bazei este egală cu:

A. $4\sqrt{3}$ cm^2 **B.** 16 cm^2 **C.** 8 cm^2 **D.** $8\sqrt{3}$ cm^2

5p 3. *VABC* este o piramidă triunghiulară regulată cu baza *ABC* și $VA \perp VB \perp VC \perp VA$. Dacă aria laterală este 32 cm^2, atunci volumul piramidei este:

A. $\frac{32}{3}$ cm^3 **B.** 32 cm^3 **C.** $16\sqrt{3}$ cm^3 **D.** $\frac{32\sqrt{3}}{9}$ cm^3

5p 4. În *Figura* 41 se știe că triunghiurile *MAB*, *NBC*, *PCD*, *QDE*, *REF* și *SFA* sunt echilaterale cu latura de 4 cm. Această figură reprezintă o bucată de carton din care Bogdan a construit o piramidă hexagonală regulată. Aria totală a piramidei este:

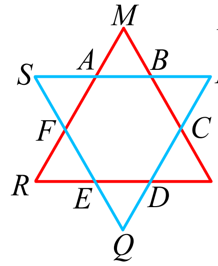


Figura 41

A. $24\sqrt{3}$ cm^2 **B.** $48\sqrt{3}$ cm^2

C. $36\sqrt{2}$ cm^2 **D.** $32\sqrt{3}$ cm^2

5p 5. O stâncă este în formă de piramidă patrulateră regulată *VABCD* cu muchia laterală $VA = 200$ m și măsura unghiului *AVB* de 45°. Un alpinist pornește din *A* pe drumul cel mai scurt până la mijlocul muchiei *VC*. Lungimea drumului parcurs de alpinist este:

A. 300 m **B.** $100(2\sqrt{2}+1)$ m **C.** $100\sqrt{5}$ m **D.** 400 m

5p 6. O piramidă patrulateră regulată are aria laterală de 1040 cm^2 și aria totală 1440 cm^2. Lungimea muchiei bazei este de:

A. $10\sqrt{2}$ cm **B.** 200 cm **C.** 12 cm **D.** 20 cm

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de rezolvare scrieți rezolvările complete. (30 de puncte)

1. O piramidă patrulateră regulată *VABCD* are latura bazei $AB = 10$ cm și apotema 13 cm.

5p a) Calculați volumul piramidei.

5p b) Demonstrați că muchia laterală este mai mică decât 14 cm.

5p c) Dacă *M* se află pe muchia *VC*, determinați lungimea lui *VM*, astfel încât aria triunghiului *MBD* să fie minimă.

2. *VABCDEF* este o piramidă hexagonală regulată cu muchia bazei $AB = 6$ cm și muchia laterală $VA = 6\sqrt{2}$ cm.

5p a) Calculați aria totală a piramidei *VABCDEF*.

5p b) Demonstrați că *VACE* este piramidă triunghiulară regulată.

5p c) Calculați raportul dintre volumul piramidei *VACE* și volumul lui *VABCDEF*.

Lecția 5. Trunchiul de piramidă regulată
Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul trunchiului de piramidă regulată
Aria și volumul trunchiului de piramidă regulată

✓ Descrierea trunchiului de piramidă regulată
Elementele trunchiului de piramidă regulată

Secționând o piramidă cu un plan paralel cu baza acesteia, se obține o piramidă asemenea cu cea dată. Îndepărtând această piramidă, se obține un poliedru a cărui denumire este *trunchi de piramidă*. Dacă piramida este regulată se spune despre trunchi că este de piramidă regulată. În *Figurile* 42, 43 și 44 sunt reprezentate: trunchiul de piramidă triunghiulară regulată, trunchiul de piramidă patrulateră regulată și trunchiul de piramidă hexagonală regulată.

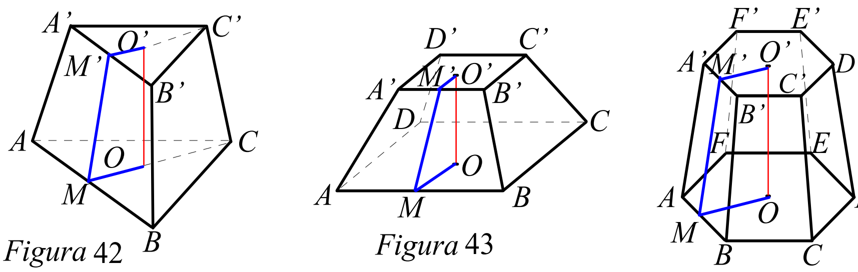


Figura 42 *Figura* 43 *Figura* 44

Reamintim câteva dintre definițiile și proprietățile cunoscute ale unui trunchi de piramidă.

- Muchiile laterale ale unui trunchi de piramidă regulată sunt congruente.
- Fețele laterale ale unui trunchi de piramidă regulată sunt trapeze isoscele congruente.
- Bazele unui trunchi de piramidă regulată sunt poligoane regulate asemenea.
- Distanța dintre planele bazelor unui trunchi de piramidă se numește înălțimea trunchiului.
- Înălțimea unuia dintre trapezele care constituie fețele laterale ale unui trunchi de piramidă se numește *apotema trunchiului*.

Notăm cu O și O' centrele cercurilor circumscrise poligoanelor ce constituie bazele trunchiului de piramidă, iar cu M și M' mijloacele laturilor AB și $A'B'$.

În trapezul dreptunghic $OMM'O'$ (vezi *Figura* 45) avem:

$OO' = h$ (înălțimea trunchiului);
$OM = a_B$ (apotema bazei mari);
$O'M' = a_b$ (apotema bazei mici);
$MM' = a_t$ (apotema trunchiului).

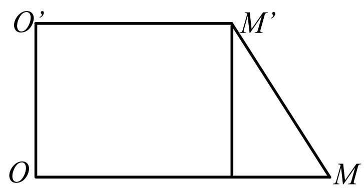


Figura 45

Are loc relația: $\boxed{a_t^2 = h^2 + (a_B - a_b)^2}$

✓ Desfășurarea trunchiului de piramidă regulată

În *figurile* de mai jos sunt reprezentate desfășurările pe un plan ale trunchiurilor de piramidă triunghiulară (vezi *Figura* 46), patrulateră (vezi *Figura* 47) și hexagonală regulate (vezi *Figura* 48).

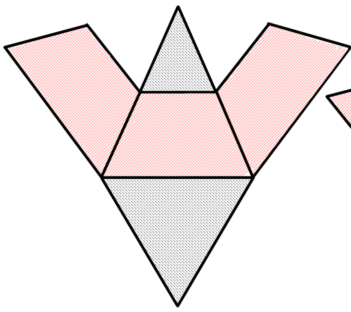


Figura 46

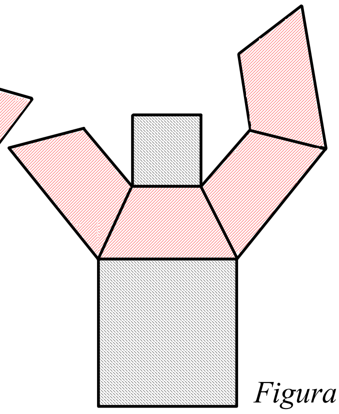


Figura 47

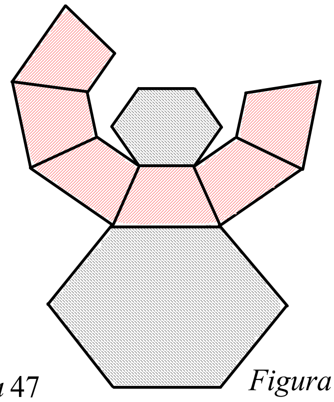


Figura 48

✓ Aria laterală și aria totală a trunchiului de piramidă regulată

Definiție

- Suma ariilor fețelor laterale ale unui trunchi de piramidă se numește *aria laterală* a trunchiului de piramidă.
- Suma ariilor tuturor fețelor unui trunchi de piramidă se numește *aria totală* a trunchiului.

Notăm aria laterală cu $\mathcal{A}_l$, aria totală cu $\mathcal{A}_t$ și ariile bazelor cu $\mathcal{A}_B$ (aria bazei mari) și $\mathcal{A}_b$, (aria bazei mici). Mai notăm cu L latura bazei mari cu l latura bazei mici și cu a_t apotema trunchiului.

Are loc relația evidentă: $\boxed{\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b}$

Deoarece fețele laterale ale unui trunchi de piramidă regulată sunt trapeze congruente, ariile lor sunt egale. Aria unei fețe laterale este $\dfrac{(L+l)\cdot a_t}{2}$. Deci, pentru un trunchi de piramidă al cărei baze sunt poligoane cu n laturi, avem $\mathcal{A}_l = n\cdot\dfrac{(L+l)\cdot a_t}{2} = \dfrac{(nL+nl)\cdot a_t}{2}$. Cum $n\cdot L = \mathcal{P}_B$ (perimetrul bazei mari) și $n\cdot l = \mathcal{P}_b$ (perimetrul bazei mici), obținem formula: $\boxed{\mathcal{A}_l = \dfrac{(\mathcal{P}_B + \mathcal{P}_b)\cdot a_t}{2}}$

Geometrie

✓ Volumul trunchiului de piramidă regulată

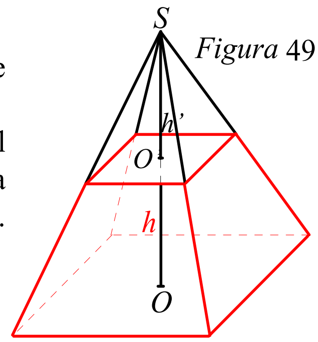


Figura 49

Ne propunem să găsim o formulă pentru calculul volumului unui trunchi de piramidă în funcție de înălțime și ariile celor două baze.

Fie S, vârful piramidei din care provine trunchiul și h', distanța de la S la planul bazei mici. În *Figura* 49 am reprezentat un trunchi de piramidă patrulateră și piramida din care provine, dar raționamentul este valabil pentru orice trunchi de piramidă. Volumul trunchiului este egal cu diferența volumelor celor două piramide, deci

$$\mathcal{V}=\frac{1}{3}\mathcal{A}_B(h+h')-\frac{1}{3}\mathcal{A}_b\cdot h'=\frac{1}{3}\mathcal{A}_B\cdot h+\frac{1}{3}h'(\mathcal{A}_B-\mathcal{A}_b). \quad (1)$$

Dar $\frac{\mathcal{A}_b}{\mathcal{A}_B}=\left(\frac{h'}{h+h'}\right)^2$ deci $\frac{h'}{h+h'}=\frac{\sqrt{\mathcal{A}_b}}{\sqrt{\mathcal{A}_B}}$, de unde $h'\left(\sqrt{\mathcal{A}_B}-\sqrt{\mathcal{A}_b}\right)=h\sqrt{\mathcal{A}_b}$.

Înmulțind ambii membri ai acestei relații cu $\left(\sqrt{\mathcal{A}_B}+\sqrt{\mathcal{A}_b}\right)$, obținem $h'(\mathcal{A}_B-\mathcal{A}_b)=h(\sqrt{\mathcal{A}_B\cdot\mathcal{A}_b}+\mathcal{A}_b)$.

Înlocuind în relația (1), obținem formula volumului trunchiului de piramidă:

$$\boxed{\mathcal{V}=\frac{1}{3}\cdot h(\mathcal{A}_B+\mathcal{A}_b+\sqrt{\mathcal{A}_B\cdot\mathcal{A}_b})}$$

Problemă rezolvată

Fie $SABC$ o piramidă triunghiulară regulată cu înălțimea $SO=12$ cm și $AB=24$ cm. Considerăm $O'\in SO$, astfel încât $SO'=6$ cm și $O''\in(SO')$. Prin O' și O'' se duc planele $(A'B'C')$ și $(A''B''C'')$ paralele cu (ABC), $(A'\in SA$, $A''\in SA$, $B'\in SB$, $B''\in SB$, $C'\in SC$, $C''\in SC)$.

Știind că: $\frac{\mathcal{V}_{ABCA'B'C'}}{\mathcal{V}_{A'B'C'A''B''C''}}=\frac{189}{19}$, calculați:

a) înălțimea piramidei $SA''B''C''$; b) apotema trunchiului de piramidă $ABCA'B'C'$.

Soluție a) Notăm $V=\mathcal{V}_{SABC}$, $V'=\mathcal{V}_{SA'B'C'}$ și $V''=\mathcal{V}_{SA''B''C''}$.

Avem $\frac{V'}{V}=\left(\frac{6}{12}\right)^3=\frac{1}{8}$, de unde $V'=\frac{1}{8}V$.

Relația dată în ipoteză devine: $\frac{V-V'}{V'-V''}=\frac{189}{19}$.

De aici găsim: $V''=\frac{1}{27}V$ și din relația $\frac{V''}{V}=\left(\frac{SO''}{SO}\right)^3$, obținem $SO''=4$ cm (vezi *Figura* 50).

b) Dacă M și M' sunt mijloacele laturilor AB și $A'B'$, avem $OM=4\sqrt{3}$ cm, $OO'=6$ cm, iar $O'M'=\frac{1}{2}OM=2\sqrt{3}$.

Din $MM'^2=OO'^2+(OM-O'M')^2$, obținem: $MM'=4\sqrt{3}$ cm.

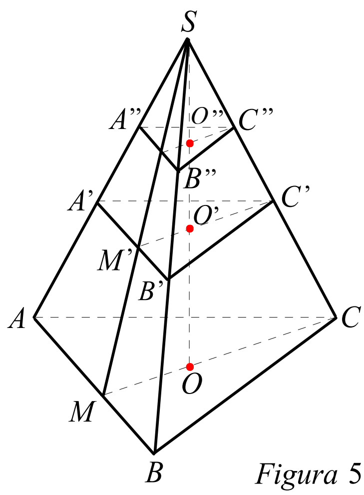


Figura 50

PROBLEME

1 Copiați și completați tabelul alăturat (L, l, a_t, m, h, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$, $\mathcal{V}$ reprezintă latura bazei mari, latura bazei mici, apotema, muchia laterală, înălțimea, aria laterală, aria totală și volumul unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată).

L	l	a_t	m	h	$\mathcal{A}_l$	$\mathcal{A}_t$	$\mathcal{V}$
6	4	5					
	6	2		1			
	4	12	13				
4	2						$14\sqrt{3}$
6					75	$75+13\sqrt{3}$	

2 Fie $ABCA'B'C'$ un trunchi de piramidă triunghiulară regulată. Punctele O și O' sunt centrele de greutate ale bazelor ABC, respectiv $A'B'C'$.

Știind că $AB = 8$ cm, $A'B' = 6$ cm, $AA' = \dfrac{2\sqrt{39}}{3}$, calculați:

a) aria totală a trunchiului;
b) volumul piramidei din care provine trunchiul;
c) distanțele de la punctele O și O' la planul (BCC').

3 În trunchiul de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ avem $AB = 6$ cm, $A'B' = 3$ cm și $AC' = \sqrt{37}$ cm. Calculați:

a) înălțimea trunchiului de piramidă;
b) volumul piramidei din care provine trunchiul;
c) distanța de la punctul A la planul (BCC').

4 În trunchiul de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ latura bazei mari $AB = 24$ cm, latura bazei mici $A'B' = 12$ cm, iar diagonalele unei fețe laterale sunt perpendiculare. Calculați:

a) aria laterală și aria totală a trunchiului;
b) volumul trunchiului;
c) tangenta unghiului făcut de planul unei fețe laterale cu planul bazei mici.

5 a) Se consideră trunchiul de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$.

Să se arate că, dacă $\operatorname{tg}(\sphericalangle(AA',(ABC))=1$, atunci $\operatorname{tg}(\sphericalangle((BCC'B'),(ABC))=2$.

b) Calculați volumul trunchiului de piramidă cu proprietatea de la punctul a, în ipoteza că latura bazei mari $AB = 12$ cm și $AA' = 2\sqrt{6}$ cm.

6 Copiați și completați tabelul de mai jos unde L, l, m, a_T, h, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$, $\mathcal{V}$ sunt respectiv, latura bazei mari, latura bazei mici, muchia laterală, apotema, înălțimea, aria laterală, aria totală și volumul unui trunchi de piramidă patrulateră regulată.

L	l	m	a_T	h	$\mathcal{A}_l$	$\mathcal{A}_t$	$\mathcal{V}$
8	2		5				
8			3	$\sqrt{5}$			
	4		3		60		
52		$7\sqrt{34}$		35			
	2			6			56

7 O bomboană de ciocolată are forma unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$. Se știe că

$AB = 4$ cm, $A'B' = 3$ cm și $AA' = \frac{\sqrt{39}}{3}$ cm.

a) Arătați că înălțimea trunchiului este egală cu 2 cm.
b) Calculați volumul bomboanei.
c) Aflați masa bomboanei, știind că densitatea ciocolatei este $1,3 g/cm^3$ (se va folosi aproximarea $\sqrt{3} \simeq 1,7$).

8 Trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are baza mare $ABCD$, valoarea tangentei unghiului $A'AC$ este egală cu $\frac{3}{2}$, $AB = 12$ cm și $A'C' = 8\sqrt{2}$ cm. Calculați:
a) volumul trunchiului de piramidă;
b) aria laterală a trunchiului.
c) Fie P un punct situat pe muchia BB'. Calculați lungimea segmentului BP, astfel încât aria triunghiului APC să fie minimă.

9 O piesă metalică în formă de trunchi de piramidă patrulateră regulată are latura bazei mari de 16 cm, latura bazei mici de 4 cm și muchia laterală de 10 cm.
a) Arătați că înălțimea piesei este egală cu $2\sqrt{7}$ cm.
b) Ce cantitate de vopsea este necesară pentru vopsirea piesei, dacă pentru 1 cm^2 de suprafață se folosesc $0,5$ g de vopsea?
c) Cât cântărește piesa după vopsire, dacă densitatea metalului este $1,5 \text{ g/cm}^3$ (se va folosi pentru $\sqrt{7}$ valoarea aproximativă $2,6$).

10 Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are latura bazei mari de 16 cm, latura bazei mici de 8 cm și aria totală a piramidei din care provine trunchiul de 576 cm^2. Calculați:
a) aria totală a trunchiului;
b) volumul trunchiului de piramidă.

11 Copiați și completați tabelul de mai jos (L, l, m, a_t, h, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$, $\mathcal{V}$ sunt, respectiv latura bazei mari, latura bazei mici, muchia laterală, apotema, înălțimea, aria laterală, aria totală și volumul unui trunchi de piramidă hexagonală regulată).

L	l	m	a_t	h	$\mathcal{A}_l$	$\mathcal{A}_t$	$\mathcal{V}$
6	4		2				
12		$\sqrt{5}$		1			
20			41		4305		
	6				$160\sqrt{3}$	$346\sqrt{3}$	
	3			10			$395\sqrt{3}$

12 Un trunchi de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ cu baza mare $ABCD$ are $AB = 8$ cm și $A'B' = 4$ cm. O față laterală a trunchiului face cu planul bazei mari un unghi cu măsura de $45°$. Calculați:
a) aria laterală a trunchiului;
b) măsura unghiului dintre două fețe laterale opuse ale trunchiului;
c) distanța de la punctul A la fața (BCC');
d) tangenta unghiului dintre două fețe laterale alăturate.

13 Fie un trunchi de piramidă hexagonală regulată $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ în care $AB = 8$ cm, înălțimea $OO' = 3$ cm și măsura unghiului făcut de o față laterală cu planul bazei mari de $60°$.
Calculați:
a) aria laterală a trunchiului;
b) volumul trunchiului;
c) distanța de la punctul A la planul (DEE');
d) sinusul unghiului făcut de fețele (ABB') și (DEE').

TEME DE SINTEZĂ

Recomandate pentru lucru în echipe

1 O bomboană de ciocolată are forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată. Laturile bazelor sunt de 6 cm, respectiv 3 cm, iar înălțimea trunchiului este $1,5$ cm.

a) Calculați volumul bomboanei.

b) Bomboana se învelește într-o folie (toate fețele inclusiv bazele). Stabiliți dacă o folie cu aria $86\,\text{cm}^2$ este suficientă pentru învelirea bomboanei.

c) Aflați unghiul dintre o față laterală a bomboanei și planul bazei mari.

2 O prăjitură are forma unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată cu muchiile bazelor de 18 cm, respectiv 6 cm și muchia laterală 8 cm.

a) Calculați aria laterală și volumul prăjiturii.

b) Calculați măsura unghiului dintre muchia laterală și planul bazei mari.

TEST DE AUTOEVALUARE

Recomandat pentru portofoliu personal

10p din oficiu

SUBIECTUL I - Pe foaia de rezolvare scrieți numai rezultatele. (30 de puncte)

5p 1. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are razele cercurilor circumscrise bazelor $4\sqrt{3}$ și $2\sqrt{3}$ cm, iar înălțimea trunchiului este de 10 cm. Volumul trunchiului este . . . cm^3.

5p 2. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are diagonalele bazelor de 12 cm, respectiv 4 cm și muchia laterală $4\sqrt{5}$ cm. Volumul trunchiului este . . . . cm^3.

5p 3. Un trunchi de piramidă hexagonală regulată are laturile bazelor 8 cm și 6 cm, iar fețele laterale fac cu planul bazei mari unghiuri de 60°. Aria laterală a trunchiului este . . . cm^2.

5p 4. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are apotemele bazelor de 4 dm, respectiv 2 dm și apotema de 6 dm. Aria totală este . . . dm^2.

5p 5. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are aria laterală $352\,\text{cm}^2$, aria bazei mici $100\,\text{cm}^2$ și apotema 8 cm. Aria bazei mari este . . . cm^2.

5p 6. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are latura bazei mari egală cu 24 cm, latura bazei mici 6 cm, iar înălțimea 12 cm. Lungimea înălțimii piramidei din care provine trunchiul este . . . cm.

SUBIECTUL al II-lea - Precizați litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

5p 1. Într-o piramidă triunghiulară regulată cu volumul $27\,\text{dm}^3$, se face o secțiune paralelă cu baza la $\frac{1}{3}$ din înălțime față de vârf. Volumul trunchiului de piramidă obținut este egal cu:

A. $18\,\text{dm}^3$ **B.** $9\,\text{dm}^3$ **C.** $3\,\text{dm}^3$ **D.** $26\,\text{dm}^3$

5p **2** O piramidă hexagonală regulată cu aria laterală $64\,cm^2$ se secționează cu un plan paralel cu baza care trece prin mijlocul înălțimii. Aria laterală a trunchiului de piramidă obținut după înlăturarea piramidei mici este egală cu:

A. $32\ cm^2$ **B.** $16\,cm^2$ **C.** $48\,cm^2$ **D.** $60\,cm^2$

5p **3** Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are latura bazei mari egală cu 24 cm, latura bazei mici egală cu 8 cm și înălțimea egală cu 6 cm. Aria laterală a trunchiului este egală cu :

A. $80\,cm^2$ **B.** $160\ cm^2$ **C.** $320\,cm^2$ **D.** $640\,cm^2$

5p **4** Un vas în formă de trunchi de piramidă patrulateră regulată are latura bazei mari 30 cm, latura bazei mici 20 cm și înălțimea 80 cm. Capacitatea vasului în litri este:

A. $19\,l$ **B.** $57\,l$ **C.** $20\,l$ **D.** $1300\,l$

5p **5** $ABCDA'B'C'D'$ este un trunchi de piramidă patrulateră regulată cu $AB = 12\sqrt{2}$ cm, $A'B' = 6\sqrt{2}$ cm și $AC' \perp A'C$. Volumul trunchiului de piramidă este:

A. $3024\,cm^3$ **B.** $6048\,cm^3$ **C.** $6048\sqrt{2}\ cm^3$ **D.** $3024\sqrt{2}\ cm^3$

5p **6** O piramidă triunghiulară regulată este secționată cu un plan paralel cu baza, obținând astfel o piramidă mai mică cu volumul $10\sqrt{3}\ cm^3$ și un trunchi de piramidă cu volumul $70\sqrt{3}\ cm^3$. Calculați raportul dintre aria laterală a piramidei mici și aria laterală a trunchiului:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{1}{8}$

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de rezolvare scrieți rezolvările complete. (30 de puncte)

1 Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are volumul de $124\,cm^3$, latura bazei mari de 10 cm și înălțimea de 3 cm.

5p a) Aflați lungimea laturii bazei mici.

5p b) Calculați aria laterală a trunchiului

5p c) Calculați distanța de la centrul bazei mari la planul unei fețe laterale.

2 Un trunchi de piramidă hexagonală regulată are razele cercurilor circumscrise bazelor de 12 cm și 6 cm, iar muchia laterală de 10 cm.

5p a) Calculați aria laterală a trunchiului.

5p b) Calculați volumul trunchiului.

5p c) Determinați distanța de la centrul bazei mari la o muchie laterală.

*

* *

Lecția 6. Aria și volumul cilindrului circular drept

✓ Descrierea cilindrului circular drept
Elementele cilindrului circular drept

În *Figura* 51, am reprezentat o suprafață dreptunghiulară $OO'A'A$. Dacă această suprafață se rotește în jurul dreptei OO', se obține un cilindru circular drept.

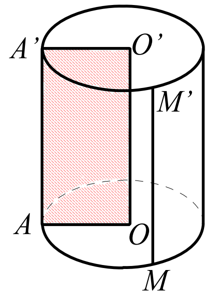


Figura 51

Spunem că cilindrul circular drept este un corp de rotație. Vom pune în evidență elementele sale.

- Prin rotirea în jurul punctului O, în plan perpendicular pe OO', segmentul OA descrie discul de centru O și rază OA. La fel, prin rotirea în jurul punctului O', în plan perpendicular pe OO', segmentul $O'A'$ descrie discul de centru O'și rază $O'A'$. Cele două discuri constituie *bazele* cilindrului circular drept.

Bazele sunt două discuri de raze egale situate în plane paralele. Denumirea de cilindru circular drept este motivată de faptul că bazele cilindrului sunt discuri (deci suprafețe mărginite de cercuri), iar dreapta care unește centrele lor este perpendiculară pe planele bazelor.

- Dreapta OO' determinată de centrele bazelor se numește *axa* cilindrului (axa de rotație).
- Segmentul AA' și oricare dintre pozițiile ocupate de acest segment în cursul rotației poartă numele de *generatoare*. Deci o generatoare a cilindrului circular drept este un segment MM', unde M și M' aparțin respectiv cercurilor celor două baze, iar dreapta MM' este perpendiculară pe planele bazelor.
- Distanța dintre cele două baze ale cilindrului se numește *înălțime*. Vom nota raza bazei cilindrului cu R, înălțimea cu h și lungimea generatoarei cu G. Deci $G = h$.

✓ Desfășurarea cilindrului circular drept
Aria laterală și aria totală a cilindrului circular drept

O generatoare a cilindrului circular drept, rotindu-se în jurul axei, generează suprafața laterală a cilindrului. În *Figura* 52 este reprezentată o cutie de carton cilindrică a cărei suprafață este colorată în roșu, iar bazele sunt hașurate.

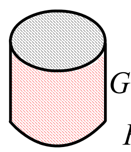


Figura 52

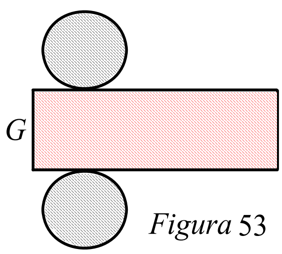


Figura 53

Decupând cercurile bazelor și tăind suprafața laterală de-a lungul unei generatoare, suprafața cutiei poate fi desfășurată pe un plan (vezi *Figura* 53).

Desfășurarea suprafeței laterale este un dreptunghi, având o dimensiune egală cu lungimea cercului bazei, iar cealaltă dimensiune egală cu generatoarea cilindrului.

Obținem formula ariei laterale: $\boxed{\mathcal{A}_l = 2\pi RG}$

Aria totală se calculează din relația: $\boxed{\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b}$

Cum aria bazei este $\mathcal{A}_b = \pi R^2$, obținem: $\boxed{\mathcal{A}_t = 2\pi RG + 2\pi R^2 = 2\pi R(G+R)}$

✓ Volumul cilindrului circular drept

Volumul cilindrului circular drept se calculează după aceeași formulă ca și volumul prismei drepte: $\boxed{\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h}$

Cum în cazul cilindrului circular drept, $\mathcal{A}_b = \pi R^2$, obținem: $\boxed{\mathcal{V} = \pi R^2 h}$

✓ Secțiuni în cilindrul circular drept: secțiuni paralele cu baza și secțiuni axiale

1. Intersecția nevidă a unui cilindru circular drept cu un plan paralel cu baza este un disc congruent cu baza. Dacă planul α, paralel cu planul bazei, intersectează segmentele OO' și AA' în punctele O'' și A'' atunci secțiunea determinată de acest plan în cilindru este discul de centru O'' și rază $O''A'' = OA = R$ (vezi *Figura* 54).

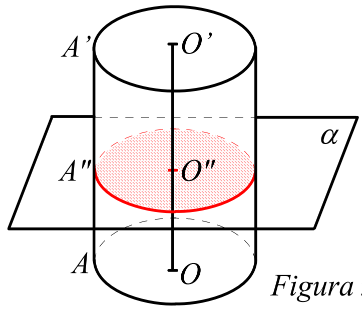


Figura 54

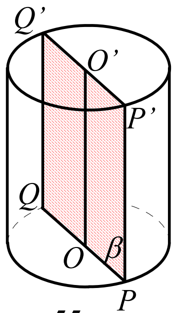


Figura 55

2. Intersecția unui cilindru circular drept cu un plan care conține axa se numește *secțiune axială în cilindru*. Planul β ce conține axa OO', taie cercul unei baze în punctele diametral opuse P și Q, iar cercul celeilalte baze în punctele diametral opuse P' și Q'. Secțiunea determinată de planul β în cilindru este suprafața dreptunghiulară $PQQ'P'$ (vezi *Figura* 55).

O secțiune axială într-un cilindru circular drept este o suprafață dreptunghiulară, având ca dimensiuni lungimea diametrului și lungimea generatoarei cilindrului dat.

Problemă rezolvată

Pentru a afla volumul unei piese de formă neregulată, o scufundăm într-un vas cilindric cu apă. Știind că diametrul vasului este de 30 cm și că prin introducerea piesei, nivelul apei s-a ridicat cu 5 cm, calculați volumul piesei.

Soluție Volumul piesei este egal cu volumul unui cilindru cu raza de 15 cm și înălțimea de 5 cm .

Deci $\mathcal{V} = \pi \cdot 15^2 \cdot 5 = 1125\pi \simeq 3534,3\ \text{cm}^3$.

PROBLEME

1 Copiați și completați tabelul următor în care R, G, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$ reprezintă raza, generatoarea, aria laterală, aria totală și volumul unui cilindru circular drept.

R	G	$\mathcal{A}_l$	$\mathcal{A}_t$	$\mathcal{V}$
4	7			
5		100π		
	4	200π		
2				40π
		124π	196π	

2 Un cilindru circular drept are generatoarea de 4 cm și aria bazei de 36π cm^2. Calculați aria totală și volumul cilindrului.

3 O cutie de suc are forma unui cilindru circular drept cu raza bazei de 4 cm și înălțimea de 15 cm.

a) Arătați că în cutie încap 750 ml de suc.

b) Calculați aria totală a cutiei.

c) O cutie de carton, în formă de paralelipiped dreptunghic, are cele mai mici dimensiuni posibile pentru a ambala 24 de cutii de suc grupate în patru rânduri de câte 6 cutii. Determinați aria totală și volumul cutiei de carton.

4 Suprafața laterală a unui cilindru circular drept se desfășoară după un dreptunghi care are lungimea de 12π și lățimea de 8 cm, egală cu generatoarea cilindrului. Calculați aria laterală, aria totală, volumul și aria secțiunii axiale a cilindrului.

5 Un cilindru circular drept are secțiunea axială un pătrat cu aria egală cu 16 cm^2. Calculați volumul cilindrului.

6 Un butoi în formă de cilindru circular drept, cu o bază situată într-un plan orizontal α și având raza de 30 cm și generatoarea de 1 m, se umple cu apă. Se apleacă butoiul astfel ca apa să curgă până când nivelul apei rămase atinge mijlocul generatoarei BB', după care butoiul revine la poziția verticală.

a) Calculați volumul butoiului.

b) Câți litri de apă rămân în butoi după înclinarea acestuia?

(Rotunjiți rezultatul la un număr întreg).

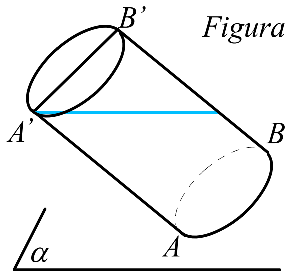


Figura 56

7 Calculați masa unei țevi cilindrice cu diametrul interior de 12 mm, diametrul exterior de 16 mm și lungimea de 200 cm, știind că densitatea materialului din care este confecționată țeava este 7,8 g/cm^3.

8 Două cutii cilindrice cu vopsea sunt ambalate în plastic, așa cum observați în *Figura* 57. Dimensiunile fiecărei cutii sunt: înălțimea 20 cm, diametrul 10 cm.
Calculați aria foliei din plastic folosită la împachetare.

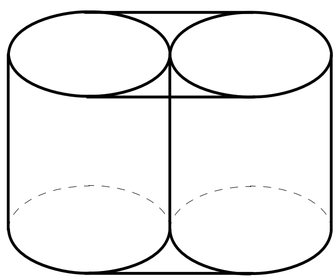


Figura 57

9 Dintr-o bară metalică în formă de prismă dreaptă cu baza pătrat cu latura bazei de 1 dm și înălțimea egală cu 1,5 m se strunjește un ax cilindric cu pierdere minimă de material. Calculați volumul axului obținut și volumul pierderilor de material.

10 În *Figura* 58 este reprezentată o țeavă din material plastic în formă cilindrică și la exterior și la interior. Diametrul interior este de 3 cm, grosimea pereților țevii este $0,5$ cm, iar înălțimea este de 1 m.

a) Arătați că diametrul exterior al țevii este de 4 cm.

b) Calculați volumul țevii.

c) Calculați masa țevii, știind că densitatea materialului din care este făcută este $0,4$ g/cm^3 (se va considera pentru π aproximarea $3,14$).

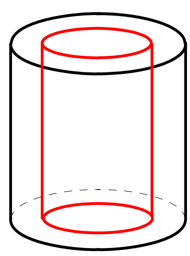


Figura 58

Lecția 7. Aria și volumul conului circular drept

✓ Descrierea conului circular drept
Elementele conului circular drept

În viața cotidiană, în natură, în tehnică, întâlnim obiecte care au formă de con, cum sunt: diverse vase, recipiente (în formă de conuri cu vârful în jos), pâlnii, acoperișurile unor turnuri, vârfuri ale unor unelte, vârfurile creioanelor ascuțite cu ascuțitoarea; formele de relief numite conuri vulcanice au aproximativ formă de con.

Conul circular drept este un corp de rotație.

În *Figura* 59, am reprezentat o suprafață trunghiulară VAO cu unghiul O de 90°. Dacă această suprafață se rotește în jurul dreptei VO, se obține un con circular drept.

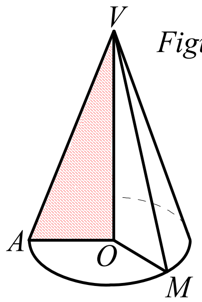


Figura 59

- Punctul V reprezintă *vârful* conului.
- Prin rotirea în jurul punctului O, în plan perpendicular pe VO, segmentul OA descrie discul de centru O și rază OA. Acest disc constituie *baza* conului circular drept. Denumirea de con circular drept este motivată de faptul că baza este un disc (deci o suprafață mărginită de un cerc), iar dreapta care unește vârful cu centrul bazei este perpendiculară pe planul bazei.
- Dreapta VO reprezintă *axa* conului (axa de rotație).
- Segmentul VA și oricare dintre pozițiile ocupate de acest segment în cursul rotației poartă numele de *generatoare*. Deci, o generatoare a conului circular drept este un segment VM, unde M aparține cercului bazei.
- Distanța VO de la vârful conului la planul bazei se numește *înălțime*.

Vom nota raza bazei conului cu R, înălțimea cu h și lungimea generatoarei cu G.

Are loc relația: $\boxed{G^2 = R^2 + h^2}$

✓ Desfășurarea conului circular drept
Aria laterală și aria totală a conului circular drept

Reuniunea tuturor segmentelor VM, unde V este vârful conului, iar punctul M este mobil pe cercul bazei, formează suprafața laterală a conului.

Dintr-o bucată de carton, tăiați un sector circular, apoi prin înfășurare și lipire, confecționați un coif reprezentând suprafața laterală a unui con circular drept.

Desfășurarea pe un plan a suprafeței laterale a unui con circular drept este un sector circular a cărui rază este generatoarea conului, iar lungimea arcului corespunzător sectorului este egală cu lungimea cercului bazei (vezi *Figura* 60).

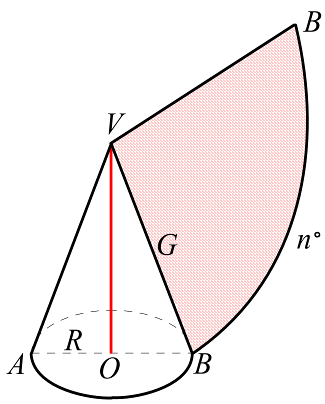


Figura 60

Aria laterală a conului (notată $\mathcal{A}_l$) este egală cu aria sectorului. Notăm cu $n°$, măsura arcului ce corespunde sectorului. Pentru a determina valoarea lui n în funcție de elementele conului, facem următorul raționament:

Cercul de centru V și rază G, având lungimea $2\pi G$, corespunde unui arc de 360°. Atunci arcul BB', având lungimea $2\pi R$, are măsura $n° = \dfrac{2\pi R \cdot 360°}{2\pi G} = \dfrac{R \cdot 360°}{G}$.

Înlocuind această valoare în $\mathcal{A}_l = \dfrac{\pi G^2 \cdot n°}{360°}$, obținem $\boxed{\mathcal{A}_l = \pi R G}$

Evident, aria totală a conului circular drept este dată de relația $\boxed{\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b}$

și cum aria bazei este aria discului de rază R, obținem: $\boxed{\mathcal{A}_t = \pi R G + \pi R^2 = \pi R(G + R)}$

Observații

1. Dacă arcul BB' al sectorului circular ce constituie desfășurarea suprafeței laterale are măsura cel mult egală cu $180°$, atunci măsura unghiului sectorului coincide cu măsura arcului corespunzător.

2. Formal, putem obține formula ariei laterale a conului circular drept, pornind de la formula ariei laterale a piramidei regulate, $\mathcal{A}_l = \dfrac{P_b \cdot a_p}{2}$ în care înlocuim perimetrul bazei cu lungimea cercului, iar apotema piramidei cu generatoarea.

✓ Volumul conului circular drept

Volumul conului circular drept se calculează după aceeași formulă ca și volumul piramidei: $\boxed{\mathcal{V} = \dfrac{A_b \cdot h}{3}}$

Cum în cazul conului circular drept, $\mathcal{A}_b = \pi R^2$, obținem: $\boxed{\mathcal{V} = \dfrac{\pi R^2 h}{3}}$

✓ Secțiuni în conul circular drept: secțiuni paralele cu baza și secțiuni axiale

1. Intersecția nevidă a unui con circular drept cu un plan paralel cu baza (și care nu trece prin vârf) este un disc.

Considerăm un con circular drept de vârf V, având ca bază discul de centru O și rază $OA = R$. Un plan α, paralel cu planul bazei taie segmentul (VO) în O' și segmentul (VA) în A'. Secțiunea determinată de planul α în conul dat este discul de centru O' și rază $r = O'A'$ (vezi *Figura* 61). Dacă notăm $VO' = h'$, din asemănarea triunghiurilor $VO'A'$ și VOA obținem relația: $\dfrac{r}{R} = \dfrac{h'}{h}$. De aici, deducem că raportul dintre volumul $\mathcal{V}'$ al conului mic și volumul $\mathcal{V}$ al conului mare este: $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{\frac{1}{3}r^2h'}{\frac{1}{3}R^2h} = \left(\dfrac{r}{R}\right)^3$.

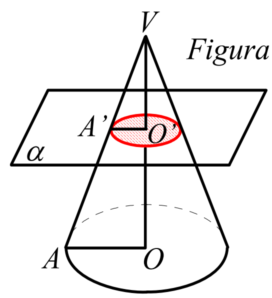


Figura 61

Temă pentru lucru în echipe Demonstrați că raportul dintre ariile laterale (totale) ale celor două conuri este egal cu $\left(\dfrac{r}{R}\right)^2$.

2. Intersecția unui con circular drept cu un plan care conține axa conului se numește *secțiune axială în con*.

Planul β ce conține axa VO taie cercul bazei în două puncte diametral opuse P și Q. Secțiunea determinată de planul β în con este suprafața triunghiulară VPQ (vezi *Figura* 62).

O secțiune axială într-un con circular drept este o suprafață triunghiulară determinată de un triunghi isoscel, având baza diametrul discului și laturile congruente generatoare ale conului.

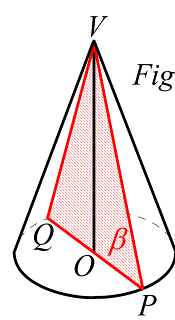


Figura 62

Problemă rezolvată

Desfășurarea pe un plan a suprafeței laterale a unui con circular drept este un sector circular cu raza de 12 m și măsura unghiului de $120°$. Calculați aria totală, volumul și aria secțiunii axiale a conului circular drept.

Soluție Aria laterală a conului este egală cu aria sectorului circular adică cu $\dfrac{\pi \cdot 12^2 \cdot 120°}{360°} = 48\pi$ m^2. Raza sectorului de 12 m este generatoarea conului. Din $48\pi = \pi \cdot 12 \cdot R$, găsim $R = 4$ m, $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b = 48\pi + \pi \cdot 16 = 64\pi$ m^2.
Înălțimea este $h = \sqrt{G^2 - R^2} = \sqrt{144 - 16} = 8\sqrt{2}$ m; deci $\mathcal{V} = \dfrac{\pi R^2 h}{3} = \dfrac{128\sqrt{2}\,\pi}{3}$ m^3.

Aria secțiunii axiale este $\mathcal{A} = \dfrac{2Rh}{2} = Rh = 32\sqrt{2}$ m^2.

PROBLEME

1 Desenați corpuri din realitatea înconjurătoare care au formă de con.

2 Decupați din carton un sector circular de rază 20 cm care corespunde unui arc cu măsura de 270°. Calculați raza pe care trebuie să o aibă un disc, astfel încât să reprezinte baza unui con a cărui suprafață laterală desfășurată reprezintă sectorul considerat. Construiți apoi conul și calculați volumul său.

3 O foaie de tablă are forma unui sector circular cu raza 48 cm și arcul corespunzător 240°.
Prin înfășurare, obținem un vas conic.
a) Arătați că înălțimea conului este $16\sqrt{5}$ cm.
b) Calculați volumul conului.
c) Calculați aria laterală a conului.

4 Generatoarea unui con are 8 cm și face cu planul bazei conului un unghi de 30°. Calculați aria totală și volumul conului.

5 Copiați și completați tabelul următor, în care R, G, h, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$ reprezintă raza, generatoarea, înălțimea, aria laterală, aria totală și volumul unui con circular drept.

R	G	h	$\mathcal{A}_l$	$\mathcal{A}_t$	$\mathcal{V}$
12	13				
6		8			
	10		60π		
9					324π
			$12\sqrt{3}\,\pi$	$12\pi(\sqrt{3}+1)$	
			6π		$2\pi\sqrt{3}$

6 Secțiunea axială a unui con circular drept este un triunghi dreptunghic cu aria egală cu 32 cm^2. Calculați aria laterală, aria totală și volumul conului.

7 Într-un con circular drept, perimetrul secțiunii axiale este de 32 cm, iar cosinusul unghiului dintre o generatoare și planul bazei este de 0,6.
Calculați volumul conului.

8 Într-un con circular drept de vârf V, generatoarele VA, VB, VC sunt perpendiculare două câte două, iar $AB = 18$ cm.
a) Calculați aria laterală și volumul conului.
b) Fie punctul M mijlocul segmentului BC.
Calculați măsura unghiului dintre planele (AVM) și (AVB).

9 Desfășurarea suprafeței laterale a unui con circular drept este un semicerc cu raza 4 cm.
Calculați volumul conului.

10 Desfășurarea suprafeței laterale a unui con circular drept este un sector de cerc cu raza de 14 cm și unghi de 120°. Aflați aria laterală și volumul conului.

11 Un con circular drept are generatoarea de două ori mai mare decât raza. Calculați măsura unghiului sectorului obținut prin desfășurarea suprafeței laterale a conului.

12 Un con circular drept are raza de 3 cm și înălțimea de 4 cm. La ce distanță de vârf trebuie făcută o secțiune paralelă cu baza, astfel încât aria secțiunii să fie un sfert din aria bazei?

13 Se consideră un con circular drept cu înălțimea de 12 cm și raza $2\sqrt{3}$ cm. Prin punctul M care aparține înălțimii conului și este egal depărtat de vârful conului și de orice punct al cercului bazei, se duce un plan paralel cu planul bazei.
Aflați volumul conului mic.

Lecția 8. Aria și volumul trunchiului de con circular drept

✓ Descrierea trunchiului de con circular drept
Elementele trunchiului de con circular drept

Dacă secționăm un con circular drept cu un plan paralel cu baza sa și îndepărtăm conul mic care se obține, corpul rămas este un trunchi de con circular drept.

Trunchiul de con circular drept este un corp de rotație. Considerăm o suprafață patrulateră mărginită de trapezul dreptunghic $AOO'B$. Rotind suprafața în jurul dreptei suport a înălțimii OO', se obține un trunchi de con. (Vezi *Figura* 63.)

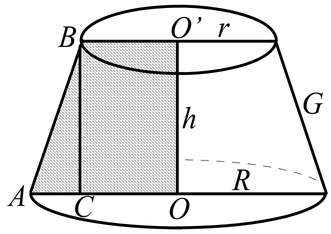


Figura 63

- Dreapta OO' reprezintă *axa* trunchiului de con (axa de rotație).
- *Bazele* trunchiului de con sunt discurile de centre O și O' și raze OA, respectiv $O'B$. Aceste discuri sunt situate în plane perpendiculare pe axă, deci planele bazelor sunt paralele. Notăm $OA = R$ și $O'B = r$.
- Segmentul AB și oricare dintre pozițiile ocupate de acest segment în cursul rotației poartă numele de *generatoare*. Notăm lungimea generatoarei cu G.
- Distanța dintre planele bazelor se numește *înălțime*. Notăm înălțimea trunchiului de con cu h.

Fie C proiecția punctului B pe AO.

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul ABC, obținem relația: $\boxed{G^2 = (R-r)^2 + h^2}$

✓ Desfășurarea trunchiului de con circular drept
Aria laterală și aria totală a trunchiului de con circular drept

Desfășurăm pe un plan suprafața laterală a unui trunchi de con și suprafața laterală a conului din care provine trunchiul (vezi *Figura* 64). Din asemănarea triunghiurilor $VO'B'$ și VOB, avem $\frac{VB'}{VB} = \frac{r}{R}$, de unde, din $VB - VB' = G$, găsim $VB = \frac{R \cdot G}{R-r}$ și $VB' = \frac{r \cdot G}{R-r}$.

Aria laterală a trunchiului de con este diferența dintre aria laterală a conului mare și aria laterală a conului mic, deci $\mathcal{A}_l = \pi \cdot VB \cdot R - \pi \cdot VB' \cdot r$. Înlocuind valorile lui VB și VB', obținem formula: $\boxed{\mathcal{A}_l = \pi G(R+r)}$

Aria totală a trunchiului de con circular drept este suma dintre aria laterală și ariile celor două baze: $\boxed{\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b}$, adică $\mathcal{A}_t = \pi G(R+r) + \pi R^2 + \pi r^2$.

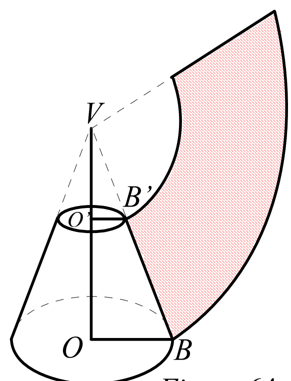


Figura 64

Observație

Formal, putem obține formula ariei laterale a trunchiului de con circular drept, pornind de la formula ariei laterale a trunchiului de piramidă regulată $\mathcal{A}_l = \frac{(P_B + P_b) \cdot a_t}{2}$, în care înlocuim perimetrele bazelor cu lungimile cercurilor, iar apotema trunchiului de piramidă, cu generatoarea trunchiului de con.

✓ Volumul trunchiului de con circular drept

Volumul trunchiului de con circular drept se calculează după aceeași formulă ca și a trunchiului de piramidă:

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{h}{3}\left(A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b}\right)}$$

Înlocuind $\mathcal{A}_B = \pi R^2$ și $\mathcal{A}_b = \pi r^2$, obținem: $\boxed{\mathcal{V} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)}$

✓ Secțiuni în trunchiul de con circular drept: secțiuni paralele cu baza și secțiuni axiale

1. Intersecția nevidă a unui trunchi de con circular drept cu un plan paralel cu baza este un disc (vezi *Figura* 65).

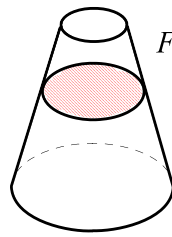


Figura 65

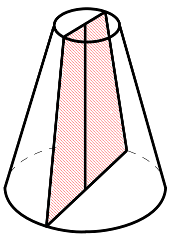


Figura 66

2. Intersecția unui trunchi de con circular drept cu un plan care conține axa se numește secțiune axială în trunchiul de con. Această secțiune este o suprafață patrulateră mărginită de un trapez isoscel (vezi *Figura* 66).

Problemă rezolvată

Fie $ABB'A'$ o secțiune axială a unui trunchi de con circular drept. În cercul de diametru AB, ducem coarda CD, astfel încât $AB \parallel CD$ (vezi *Figura* 67).

Dacă $AB = 20$ cm, $A'B' = CD = 12$ cm, iar măsura unghiului format de planele $(CDB'A')$ și $(ABB'A')$ este de 30°, calculați:

a) aria laterală, aria totală și volumul trunchiului de con;

b) distanța de la centrul bazei mari la planul $(A'B'CD)$.

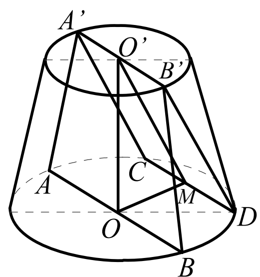


Figura 67

Soluție a) Fie M, mijlocul lui CD, deci $OM \perp CD$, rezultă $O'M \perp CD$.

În triunghiul dreptunghic OMD, $OM = 8$ cm, apoi din triunghiul MOO' ($\sphericalangle MO'O = 30^\circ$), $O'M = 16$ cm și $h = OO' = 8\sqrt{3}$. Cunoaștem $R = 10$ cm, $r = 6$ cm.

Din formula $G^2 = h^2 + (R-r)^2$, determinăm $G = 4\sqrt{13}$.

Avem $\mathcal{A}_l = 64\sqrt{13}\,\pi$ cm², $\mathcal{A}_t = 8\pi(8\sqrt{13} + 17)$ cm², $\mathcal{V} = \frac{1568\sqrt{3}\,\pi}{3}$ cm³.

b) Distanța cerută este înălțimea din O a triunghiului dreptunghic $OO'M$, deoarece $(OMO') \perp (CDB'A')$, deci egală cu $\frac{OO' \cdot OM}{O'M} = 4\sqrt{3}$ cm.

PROBLEME

1 Copiați și completați tabelul alăturat în care R, r, h, G, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$ reprezintă raza bazei mari, raza bazei mici, înălțimea, generatoarea, aria laterală, aria totală și volumul unui trunchi de con circular drept.

R	r	h	G	$\mathcal{A}_l$	$\mathcal{A}_t$	$\mathcal{V}$
10	4		10			
8	5	6				
12			10	160π		
	5	35	37			
5	3					49π

2 În *Figura* 68 este reprezentată o găleată de forma unui trunchi de con cu raza bazei mici $OA = 8$ cm, raza bazei mari $O'A' = 10$ cm și înălțimea 42 cm. Toarta este un semicerc cu diametrul $A'B'$.

a) Aflați lungimea pe care o are toarta.

b) Determinați câți litri de apă încap în găleată, considerând aproximarea lui π cu 3.

c) Calculați aria suprafeței laterale a găleții.

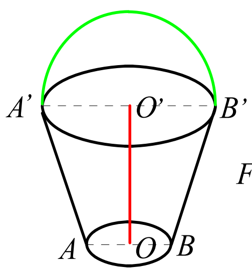


Figura 68

3 Un trunchi de con circular drept are raza mică de 4 cm, înălțimea de $6\sqrt{3}$ cm, iar generatoarea formează cu planul bazei un unghi de $60°$.

Calculați: a) aria laterală a trunchiului;

b) volumul trunchiului;

c) Distanța de la centrul bazei mari la o generatoare.

4 Un buștean în formă de trunchi de con circular drept are diametrul bazei mari de 30 cm, diametrul bazei mici de 24 cm și lungimea de 4 m. Calculați volumul bușteanului cu o eroare mai mică de o zecime.

5 Un trunchi de con circular drept are raza bazei mari egală cu 20 cm, raza bazei mici egală cu 10 cm și generatoarea egală cu 20 cm.

a) Aflați măsura unghiului dintre generatoare și planul bazei mici.

b) Calculați aria laterală a conului din care provine trunchiul.

c) Calculați măsura unghiului sectorului de cerc care reprezintă desfășurarea suprafeței laterale a conului din care provine trunchiul.

6 Într-un trunchi de con circular drept lungimea razei bazei mari, lungimea razei bazei mici și lungimea înălțimii sunt direct proporționale cu numerele 3, 2 și respectiv $\sqrt{3}$, iar generatoarea este de 8 cm.

a) Calculați aria totală și volumul trunchiului de con.

b) Fie punctul S situat pe înălțimea OO' a trunchiului de con, astfel încât volumul conului de vârf S și bază cercul de centru O' să fie egal cu volumul conului de vârf S și bază cercul de centru O. Calculați lungimea segmentului SO.

7 Secțiunea axială $ABCD$ a unui trunchi de con circular drept este un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare și cu baza mare $AB = 12$ cm. Înălțimea conului din care provine trunchiul este egală cu 12 cm.

a) Calculați aria laterală a trunchiului.

b) Calculați volumul trunchiului.

c) Arătați că măsura unghiului sectorului de cerc, care reprezintă desfășurarea suprafeței laterale a conului din care provine trunchiul este mai mică decât $161°$.

d) Arătați că lungimea celui mai scurt drum dintre punctele A și B parcurs pe suprafața laterală a trunchiului este mai mică decât 19 cm.

8 Un trunchi de con circular drept are secțiunea axială un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare. Lungimea bazei mari a trapezului este de 12 cm, iar lungimea bazei mici este de 4 cm. Calculați:

a) aria laterală a trunchiului de con;

b) volumul conului din care provine trunchiul;

c) distanța de la centrul bazei mici la o generatoare a trunchiului de con.

Lecția 9. Aria și volumul sferei

✓ Sfera și corpul sferic

Numeroase obiecte din realitatea înconjurătoare au formă sferică. Un balon de săpun este un exemplu de sferă. O bilă de la rulmenți este un exemplu de corp sferic. Pământul (ca și celelalte planete) are aproximativ formă de corp sferic.

Definiția sferei este asemănătoare cu a cercului, în timp ce definiția corpului sferic este asemănătoare definiției discului.

Definiție

- Fiind dat un punct O și un număr real $R>0$, se numește *sferă* de centru O și rază R mulțimea punctelor M din spațiu cu proprietatea $OM=R$.
- Punctele M cu proprietatea $OM<R$ formează *interiorul sferei*, iar punctele M cu proprietatea $OM>R$ formează *exteriorul sferei*.
- Reuniunea dintre sferă și interiorul sferei se numește *corp sferic* sau *bilă*.

Deci corpul sferic de centru O și rază R este mulțimea punctelor M din spațiu cu proprietatea $OM \le R$.

Sfera și corpul sferic sunt corpuri de rotație. Sfera se poate obține rotind un cerc în jurul unui diametru al său. De exemplu, prin rotirea unui cerc meridian în jurul axei Pământului, acesta descrie suprafața Pământului, care are aproximativ formă sferică (vezi *Figura* 69). Dacă un disc se rotește în jurul unui diametru al său, se obține un corp sferic (vezi *Figura* 70).

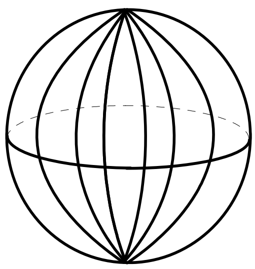


Figura 69

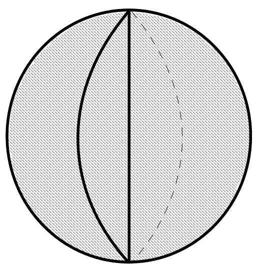


Figura 70

Dacă o dreaptă care trece prin centrul sferei o intersectează în punctele A și B, atunci AB este un diametru al sferei, iar punctele A și B sunt puncte diametral opuse.

✓ Aria sferei și volumul corpului sferic

Aria sferei este egală cu suma ariilor a patru discuri mari ale sferei: $\boxed{\mathcal{A}=4\pi R^2}$

Volumul corpului sferic de rază R este dat de formula: $\boxed{\mathcal{V}=\frac{4}{3}\pi R^3}$

Observație

Corpul sferic este un corp plin, în timp ce sfera reprezintă suprafața corpului sferic. De aceea, vorbim de aria sferei și volumul corpului sferic; dar, pentru simplitatea exprimării, uneori în loc de volumul corpului sferic vom spune volumul sferei.

Problemă rezolvată

Pe o sferă cu aria de 676π cm^2 se consideră punctele A, B, C, astfel încât $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm și $BC = 10$ cm. Calculați:

a) volumul corpului sferic;

b) distanța de la centrul sferei la planul (ABC).

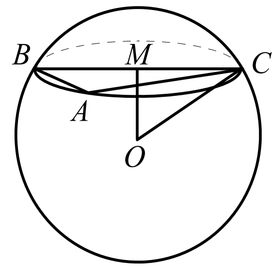


Figura 71

Soluție a) Din $4\pi R^2 = 676\pi$, obținem $R = 13$ cm, deci $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi \cdot 13^3 = \frac{8788}{3}\pi$ cm^3.

b) Avem $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (vezi *Figura* 71), deci triunghiul ABC este dreptunghic în A. Intersecția planului (ABC) cu sfera este cercul circumscris triunghiului ABC. Raza acestui cerc este $\frac{BC}{2} = 5$ cm, iar centrul este mijlocul M al ipotenuzei.

Distanța de la punctul O la planul (ABC) este $OM = \sqrt{OC^2 - MC^2} = 12$ cm.

PROBLEME

1 Calculați aria și volumul unei sfere cu raza egală cu 3 cm.

2 Calculați aria unei sfere care are volumul egal cu 288π cm^3.

3 Calculați aria unei sfere care are aria și volumul exprimate prin același număr.

4 O bilă de fier cu raza de 8 cm se nichelează cu un strat gros de 2 mm. Câți cm^3 de nichel se consumă?

5 Aproximativ trei sferturi din suprafața globului este acoperită cu apă. Câte milioane de km^2 din suprafața globului formează uscatul, știind că raza pământului este de aproximativ 6400 km?

6 *Figura* 72 reprezintă un cornet de înghețată împreună cu o cupă de înghețată semisferică. Triunghiul ABC este echilateral cu perimetrul de 36 cm. a) Determinați lungimea laturii AB.

b) Aflați volumul cupei de înghețată.

c) Comparați suprafața cornetului cu suprafața cupei de înghețată.

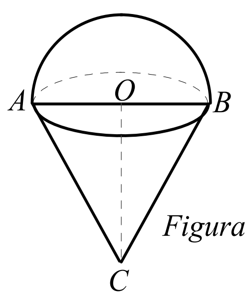


Figura 72

7 Opt bile uzate cu raza de 1 cm se topesc pentru a turna o bilă mai mare. Aflați câți mililitri de vopsea sunt necesari pentru a vopsi bila obținută după turnare, știind că 1 l de vopsea acoperă 2 m^2.

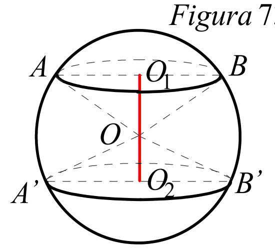
8 O bilă sferică având volumul $\frac{4000\pi}{3}$ cm^3 se taie după două plane paralele, de o parte și de alta a centrului sferei, lungimile cercurilor de secțiune, fiind 12π cm, respectiv 16π cm.

a) Aflați raza sferei.

b) Calculați distanțele de la centrul sferei la cele două plane de secțiune.

c) Ce procent din volumul sferei reprezintă suma volumelor celor două conuri cu vârfurile în centrul sferei și bazele cele două cercuri de secțiune?

Figura 73



9 Un creion neascuțit are forma unui cilindru circular drept cu generatoarea de 20 cm și raza de 5 mm. Se ascute creionul, vârful ascuțit având forma unui con circular drept cu generatoarea de 13 mm.

a) Calculați volumul creionului neascuțit.

b) Calculați volumul creionului ascuțit.

c) Cât la sută din volumul creionului s-a îndepărtat prin ascuțire?

TEME DE SINTEZĂ

Recomandate pentru lucru în echipe

1 O piesă metalică, obținută prin alăturarea unui con, a unui cilindru și a unei semisfere, este reprezentată în *Figura* 74. Se știe că: $VE = 16\,\text{cm}$, $VO = 5\,\text{cm}$ și $BC = 6\,\text{cm}$.

a) Determinați înălțimea cilindrului și generatoarea conului.

b) Calculați aria piesei.

c) Aflați volumul piesei.

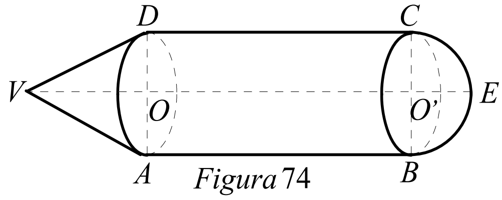


Figura 74

2 În *Figura* 75 este reprezentat un suport cilindric pentru mingi de tenis de câmp. Mingile au formă sferică, cu raza de 3 cm, iar în interiorul suportului încap trei mingi, care ocupă la maximum suportul.

a) Determinați înălțimea suportului.

b) Demonstrați că aria totală a suportului este $126\pi\,\text{cm}^2$.

c) Ce procent din volumul suportului este ocupat de cele trei mingi?

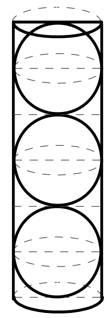


Figura 75

3 În *Figura* 76 este reprezentată schematic o cutie în formă de paralelipiped dreptunghic cu capacul de forma unei jumătăți de cilindru. Se știe că: $AB = 80\,\text{cm}$, $BC = 40\,\text{cm}$ și $AE = 60\,\text{cm}$.

a) Calculați volumul cutiei.

b) Stabiliți dacă în această cutie încape o baghetă cu lungimea de $1,1\,\text{m}$.

c) Calculați aria totală a cutiei.

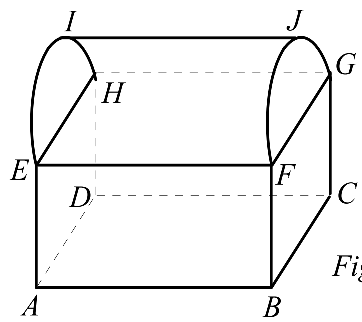


Figura 76

TEST DE AUTOEVALUARE

Recomandat pentru portofoliu personal

10p din oficiu

SUBIECTUL I - Pe foaia de rezolvare scrieți numai rezultatele. (30 de puncte)

5p 1. Un cilindru circular drept cu raza de 4 cm și generatoarea de 6 cm are volumul ... cm^3.

5p 2. Un con circular drept cu raza de 6 cm și înălțimea 45 mm are volumul ... cm^3.

5p 3. Un trunchi de con cu razele de 10 cm, respectiv 8 cm și generatoarea 9 cm are aria laterală ... cm^2.

5p 4. O sferă cu raza $3\sqrt{2}$ cm are aria ... cm^2.

5p 5. Un con circular drept are aria totală $48\pi\,\text{cm}^2$ și aria laterală $32\pi\,\text{cm}^2$. Raza conului are ... cm.

5p 6. Raza unei sfere cu volumul de $36\pi\,\text{cm}^3$ are ... cm.

SUBIECTUL al II-lea - Precizați litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

5p 1. Secțiunea axială a unui cilindru circular drept este un pătrat cu aria $64\,\text{cm}^2$. Aria laterală a cilindrului este:

A. $64\pi\,\text{cm}^2$ **B.** $128\pi\,\text{cm}^2$ **C.** $128\,\text{cm}^2$ **D.** $192\,\text{cm}^2$

5p 2. Desfășurarea suprafeței laterale a unui cilindru circular drept este un pătrat cu diagonala $6\sqrt{2}$ cm. Volumul cilindrului este:

A. $54\,\text{cm}^3$ **B.** $108\,\text{cm}^3$ **C.** $\frac{54}{\pi}\,\text{cm}^3$ **D.** $18\,\text{cm}^3$

5p 3. Secțiunea axială a unui con circular drept este un triunghi echilateral cu aria $9\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. Volumul conului este:

A. $15\pi\,\text{cm}^3$ **B.** $54\sqrt{3}\,\pi\,\text{cm}^3$ **C.** $9\sqrt{3}\,\text{cm}^3$ **D.** $9\sqrt{3}\,\pi\,\text{cm}^3$

5p 4. Un con circular drept cu volumul $64\pi\,\text{cm}^3$ se secționează cu un plan paralel cu baza care trece prin mijlocul înălțimii. Volumul trunchiului de con obținut este egal cu:

A. $56\pi\,\text{cm}^3$ **B.** $32\pi\,\text{cm}^3$ **C.** $64\pi\,\text{cm}^3$ **D.** $32\,\text{cm}^3$

5p 5. Secțiunea axială a unui trunchi de con circular drept este un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare. Știind că razele lui sunt de 16 cm și 4 cm, atunci volumul trunchiului de con este:

A. $64\,\text{cm}^3$ **B.** $192\pi\,\text{cm}^3$ **C.** $\frac{260}{3}\pi\,\text{cm}^3$ **D.** $260\pi\,\text{cm}^3$

5p 6. Dintr-o tablă în formă de semidisc cu raza de 16 cm, un tinichigiu construiește un vas în formă de con. Pentru a confecționa capacul vasului, el cumpără o bucată de tablă în formă de pătrat. Care este lungimea minimă a acesteia?

A. 8 cm **B.** 16 cm **C.** 32 cm **D.** 4 cm

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de rezolvare scrieți rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Un con circular drept are raza de 40 cm. Desfășurarea suprafeței laterale este un sector de disc cu unghiul de 90°.

5p a) Calculați raza bazei conului.

5p b) Calculați volumul conului.

5p c) Demonstrați că aria laterală a conului este mai mare decât $1256\,\text{cm}^2$ și mai mică decât $1260\,\text{cm}^2$.

2. Un cilindru circular drept cu centrele bazelor O, respectiv O' și secțiunea axială $ACC'A'$, are raza de 30 cm și generatoarea de 36 cm. Pe cercul bazei de centru O se ia punctul B, astfel încât măsura arcului AB este 120°.

5p a) Calculați distanța de la O' la AB.

5p b) Calculați distanța de la O la planul $(O'AB)$.

5p c) O furnică merge de la A la A', drumul ei intersectând toate generatoarele cilindrului. Demonstrați că drumul parcurs de furnică are lungimea mai mică decât 120 cm.

*

* *

VARIANTE DE TEZĂ PENTRU SEMESTRUL I

VARIANTA 1

SUBIECTUL I - Pe foaia de teză scrieți numai rezultatele. (30 de puncte)

5p **1.** Rezultatul calculului $2 \cdot \sqrt{36} - 6 \cdot \sqrt{4}$ este . . .

5p **2.** Suma numerelor întregi din intervalul $[-2; 4)$ este . . .

5p **3.** Fie raportul $E(x) = \dfrac{3x^3 - 7}{4x^2 + 1}$, unde x este un număr real. Calculând $E(2)$ se obține . . .

5p **4.** Suma lungimilor muchiilor unui tetraedru regulat este egală cu 72 cm. Aria unei fețe a tetraedrului regulat este egală cu . . . cm^2.

5p **5.** Dacă $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată cu vârful V și $VA = AB = 6$ cm, atunci înălțimea piramidei are lungimea de . . . cm.

5p **6.** În tabelul de mai jos este prezentată repartiția elevilor unei clase a VIII-a, în funcție de mediile obținute la matematică pe semestrul I:

Media	4	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	1	4	5	8	3	3	1

Numărul elevilor din această clasă care a obținut la matematică, pe semestrul I, cel puțin media 7 este egal cu . . .

SUBIECTUL al II-lea - Pe foaia de teză scrieți rezolvările complete. (30 de puncte)

5p **1.** Desenați, pe foaia de rezolvare, o prismă dreaptă $MNPQRS$ cu baza triunghiului echilateral MNP.

5p **2.** Calculați intersecția intervalelor $I = \left[-\frac{1}{2}; 3\right)$ și $J = \left(-1; \frac{3}{2}\right]$.

5p **3.** Arătați că numărul $a = (2\sqrt{3} - 4)^2 + (8 + \sqrt{3})^2$ este natural.

5p **4.** Descompuneți în factori expresia: $2x^3 + 16x^2 + 32x$.

5. Fie $R(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$.

5p a) Simplificați raportul $R(x)$.

5p b) Aflați $x \in \mathbf{Z}$ pentru care $R(x) \in \mathbf{Z}$.

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de teză scrieți rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 4$ dm. Notăm cu M, N, P mijloacele muchiilor AB, AD, respectiv AA'.

5p a) Arătați că aria triunghiului MNP este egală cu $2\sqrt{3}$ dm^2.

5p b) Demonstrați că planele (MNP) și $(A'BD)$ sunt paralele.

5p c) Verificați dacă, presupunând că acest cub este din carton, se poate introduce o baghetă metalică având lungimea de 7 dm.

2. Rombul $ABEF$ și pătratul $ABCD$ sunt situate în plane diferite, $AB = 8$ cm, iar măsura unghiului $\widehat{ADF}$ este de 60°.

5p a) Calculați lungimea segmentului CE.

5p b) Arătați că $CE \parallel (BDF)$.

5p c) Aflați măsura unghiului dintre dreptele AD și BE.

Timp de lucru 120 min. Din oficiu 10p.

VARIANTA 2

SUBIECTUL I - Pe foaia de teză scrieți numai rezultatele. (30 de puncte)

5p **1.** Rezultatul calculului $\sqrt{32}-4\sqrt{2}$ este egal cu . . .
5p **2.** Mulțimea $A=\{x\in\mathbf{R} \mid -4\le x<3\}$ este intervalul . . .
5p **3.** Efectuând calculul $-3a+4b-5a-6b$, obținem . . .
5p **4.** În cubul $ABCDA'B'C'D'$ măsura unghiului dintre dreptele BC' și $A'D$ este egală cu . . . °.
5p **5.** Un tetraedru regulat cu muchia de 6 cm are aria unei fețe egală cu . . . cm^2.
5p **6.** Piramida patrulateră regulată $VABCD$, cu vârful V, are $VA=AB$. Măsura unghiului AVC este egală cu . . . °.

SUBIECTUL al II-lea - Pe foaia de teză scrieți rezolvările complete. (30 de puncte)

5p **1.** Desenați pe foaia de rezolvare tetraedrul $STAR$.
5p **2.** Fie $A=\{x\in\mathbf{R} \mid \frac{1}{2}<x-1\le 3\}$ și $B=\{x\in\mathbf{R} \mid |3x-1|\le 5\}$. Calculați $A\cup B$ și $A\cap B$.
5p **3.** Rezolvați în $\mathbf{R}$ inecuația: $2\sqrt{3}x-4\ge x\sqrt{15}-2\sqrt{5}$.
5p **4.** Se consideră $E=3(a^2+b^2)+2(a-b)-6ab$, unde a și b sunt numere reale. Știind că $a-b=3$, calculați E.
5. Fie $E(x)=(x+2)^2+3(x-3)(x+3)-3x(x+2)$.
5p a) Demonstrați că $E(x)=x^2-2x-23$.
5p b) Arătați că $E(x)\ge -24$, $(\forall)x\in\mathbf{R}$.

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de teză scrieți rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu vârful V, $AB=12\sqrt{2}$ cm și $VA=20$ cm. Notăm cu E și F mijloacele muchiilor VA, respectiv VC, și cu O centrul bazei.
5p a) Arătați că $VO=16$ cm.
5p b) Calculați măsura unghiului dintre dreptele EF și BC.
5p c) Demonstrați că dreapta EF este perpendiculară pe planul (VBD).

2. $ABCDEFGH$ este o prismă patrulateră regulată cu $AB=6$ cm și $AE=8$ cm. Fie M mijlocul segmentului CF și $AC\cap BD=\{O\}$.
5p a) Arătați că $BH=2\sqrt{34}$ cm.
5p b) Demonstrați că $OM \parallel (AFG)$.
5p c) Calculați distanța de la punctul B la planul (OMC).

Timp de lucru 120 min. Din oficiu 10p.

VARIANTE DE TEZĂ PENTRU SEMESTRUL al II-lea

VARIANTA 1

SUBIECTUL I - Pe foaia de teză scrieți numai rezultatele. (30 de puncte)

5p **1.** Rezultatul calculului $\sqrt{64}-\sqrt{100}:5$ este . . .

5p **2.** Dacă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=4-x$, numărul $f(0)\cdot f(1)-f(2)$ este . . .

5p **3.** Dacă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=2x+3$ și punctul $M(3, m)$ aparține graficului funcției f, atunci valoarea lui m este . . .

5p **4.** Dacă într-o piramidă patrulateră regulată muchia bazei este de 20 cm și muchia laterală de 26 cm, atunci apotema piramidei este de . . . cm.

5p **5.** Aria totală a unui paralelipiped dreptunghic de dimensiuni 4 cm, 5 cm și 6 cm este egală cu . . . cm^2.

5p **6.** În tabelul de mai jos este reprezentat numărul de cărți împrumutate de biblioteca școlii în ultimii 4 ani:

Anul	2016	2017	2018	2019
Numărul de cărți împrumutate	437	315	533	505

Numărul total de cărți împrumutate a fost de . . . cărți.

SUBIECTUL al II-lea - Pe foaia de teză scrieți rezolvările complete. (30 de puncte)

5p **1.** Desenați pe foaia de rezolvare un paralelipiped dreptunghic $ABCDEFGH$.

5p **2.** Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația: $2x^2-5x+2=0$.

5p **3.** Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=2mx+m+1, m\in\mathbf{R}$. Aflați valoarea *lui m*, știind că punctul $P(1,2020)$ aparține graficului funcției f.

5p **4.** Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=4x-3$. Calculați $S=f(1)+f(2)+\ldots+f(30)$.

5. Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=3-2x$.

5p a) Reprezentați grafic funcția f într-un sistem de coordonate xOy.

5p b) Calculați aria triunghiului determinat de reprezentarea grafică a funcției f, axa Ox și axa Oy.

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de teză scrieți rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un bazin în formă de paralelipiped dreptunghic. Baza $ABCD$ are $AB=18\,\text{m}$ și $BC=6\,\text{m}$, iar înălțimea $AA'=3\,\text{m}$.

5p a) Arătați că volumul bazinului este egal cu $324\,\text{m}^3$.

5p b) Fețele laterale ale bazinului se placheazã cu plăci de faianță, având forma unui pătrat de latură 40 cm. Aflați numărul de plăci necesare.

5p c) În bazin se află 243 000 litri de apă. Calculați înălțimea la care se ridică apa în bazin.

2. O prismă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are baza triunghiului ABC, muchia bazei egală cu 6 cm și înălțimea egală cu 8 cm.

5p a) Calculați lungimea segmentului AC'.

5p b) Calculați distanța de la punctul C' la planul (ABA').

5p c) Determinați sinusul unghiului dintre dreptele $A'B$ și $B'C$.

Timp de lucru 120 min. Din oficiu 10p.

VARIANTA 2

SUBIECTUL I - Pe foaia de teză scrieți numai rezultatele. (30 de puncte)

5p **1.** Mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $2x^2+3x=0$ este . . .

5p **2.** O prismă patrulateră regulată are aria laterală $320\,\text{cm}^2$ și înălțimea de 10 cm. Latura bazei este egală cu . . . cm.

5p **3.** Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=(m-1)x+3, m\in\mathbf{R}$. Dacă $A(2,5)$ aparține graficului lui f, m este egal cu . . .

5p **4.** Un cub are diagonala de $3\sqrt{3}$ cm. Aria totală a cubului este . . . cm^2.

5p **5.** Un cilindru circular drept, cu generatoarea de 4 cm și aria secțiunii axiale de $48\,\text{cm}^2$, are aria laterală egală cu . . . cm^2.

5p **6.** În tabelul de mai jos este reprezentată o dependență funcțională:

x	-2	-1	a	4	6
$y=-2x+3$			1	-5	b

Suma dintre numerele a și b este egală cu . . .

SUBIECTUL al II-lea - Pe foaia de teză scrieți rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Fie funcțiile $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=3$ și $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, g(x)=-x+5$. Notăm intersecția graficelor celor două funcții cu B, intersecția graficului funcției g cu axa Ox cu C, intersecția graficului funcției g cu axa Oy cu D și intersecția graficului funcției f cu axa Oy cu A.

5p a) Calculați aria patrulaterului $OABC$.

5p b) Aflați ce procent reprezintă aria triunghiului DAB din aria triunghiului DOC.

5p c) Aflați distanța de la originea sistemului de coordonate la reprezentarea grafică a funcției g.

10p **2.** Rezolvați ecuația $\frac{1}{x^2+6x+9}+\frac{1}{x^2+7x+12}+\frac{1}{x^2+9x+20}=\frac{x+3}{x+5}, x\in\mathbf{R}\setminus\{-5,\ -4,\ -3\}$.

5p **3.** Rezolvați în $\mathbf{R}$ inecuația $(x^2-4x+5)(2x-5)\leq 0$.

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de teză scrieți rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată, astfel încât măsura unghiului dintre VA și (ABC) este 45° și $AB=12$ cm.

5p a) Aflați aria totală a piramidei.

5p b) Aflați distanța de la A la (VBC).

5p c) Se secționează piramida cu un plan paralel cu baza, astfel încât aria laterală a trunchiului obținut să fie dublul ariei laterale a piramidei mici. Aflați volumul trunchiului.

2. Triunghiul isoscel VAB de bază AB este secțiunea axială a unui con circular drept cu raza bazei de 6 cm. Punctul C se află pe cercul bazei conului, astfel încât măsura arcului $\overset{\frown}{AC}$ este 120°. Se știe că unghiul dintre planul (VAC) și planul bazei conului este de 60°.

5p a) Arătați că înălțimea conului este de $3\sqrt{3}$ cm.

5p b) Calculați aria laterală și volumul conului.

5p c) Calculați distanța de la O la (VAC), unde O este centrul bazei conului.

Timp de lucru 120 min. Din oficiu 10p.

Teste pentru pregătirea examenului de Evaluare Națională

TESTUL 1

- ***Toate subiectele sunt obligatorii.***
- ***Se acordă 10 p din oficiu.***
- ***Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.***

SUBIECTUL I Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

5p **1.** Rezultatul calculului $4^6 : 2^8$ este:
a) 8 b) 16 c) 10 d) 1

5p **2.** Dintre numerele $x = \frac{5}{3}$, $y = 1,6$, $z = 1,7$, $t = 1,5$, mai mare este numărul:
a) x b) y c) z d) t

5p **3.** Cel mai mare divizor comun al numerelor 108 și 180 este numărul:
a) 36 b) 18 c) 48 d) 54

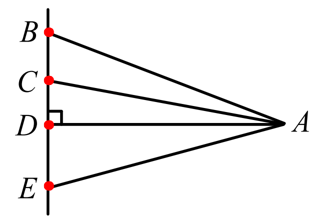
5p **4.** Suma numerelor întregi din intervalul $(-3; 2]$ este egală cu:
a) -3 b) 3 c) 0 d) 2

5p **5.** Dacă $x^2 - y^2 = 12$ și $x - y = -3$, atunci $x + y$ este egal cu:
a) -36 b) 36 c) 4 d) -4

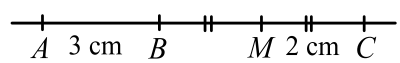
5p **6.** Dacă $a \in \mathbf{R}^*$ și $a - \frac{1}{a} = 2$, atunci valoarea de adevăr a propoziției "$a^2 + \frac{1}{a^2} = 4$" este:
a) adevărată b) falsă

SUBIECTUL al II-lea Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

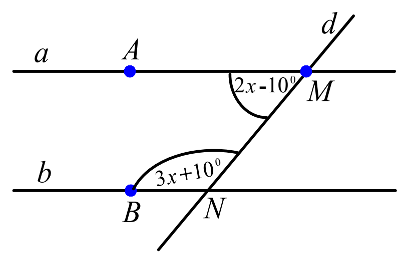
5p **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele A, B, C, D și E (punctele B, C, D, E sunt coliniare). Distanța de la punctul A la dreapta BE este egală cu lungimea segmentului:
a) AB
b) AC
c) AD
d) AE



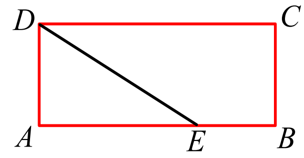
5p **2.** În figura alăturată punctele A, B și C sunt coliniare (în această ordine), iar M este mijlocul segmentului BC. Dacă $AB = 3$ cm, $MC = 2$ cm, atunci lungimea segmentului AC este egală cu:
a) 5 cm b) 7 cm c) 9 cm d) 8 cm



5p **3.** În figura alăturată, dreptele a și b sunt tăiate de secanta d. Știind că $a \cap d = \{M\}$, $b \cap d = \{N\}$, $A \in a$, $B \in b$, $\widehat{AMN} = 2x - 10^\circ$, $\widehat{BNM} = 3x + 10^\circ$, valoarea lui x pentru care dreptele a și b sunt paralele este:
a) 36°
b) 72°
c) 20°
d) 40°



5p **4.** În figura alăturată $ABCD$ este un dreptunghi cu $AD = 12\,\text{cm}$, $AB = 18\,\text{cm}$ și $E \in AB$ (E între A și B) astfel încât $AE = 0,(6) \cdot AB$. Aria patrulaterului $BCDE$ este egală cu:

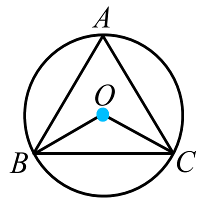


a) $288\,\text{cm}^2$
b) $144\,\text{cm}^2$
c) $108\,\text{cm}^2$
d) $576\,\text{cm}^2$

5p **5.** Trapezul dreptunghic $PQRS$ ($PQ \parallel RS$, $\widehat{P} = \widehat{S} = 90^\circ$) are diagonalele perpendiculare. Dacă $PQ = 18\,\text{cm}$ și $RS = 8\,\text{cm}$, atunci înălțimea trapezului are lungimea de:

a) $12\,\text{cm}$ b) $10\,\text{cm}$ c) $14\,\text{cm}$ d) $13\,\text{cm}$

5p **6.** Triunghiul echilateral ABC este înscris în cercul de centru O. Măsura unghiului BOC este egală cu:



a) 60°
b) 90°
c) 100°
d) 120°

SUBIECTUL al III-lea Scrieți rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Dan cumpără o minge folosind doar bancnote de 5 lei și 10 lei. Mingea costă 40 de lei.

2p a) Este posibil ca Dan să folosească doar 3 bancnote?

3p b) Știind că s-au folosit în total 5 bancnote, aflați câte bancnote de 5 lei și câte bancnote de 10 lei a folosit Dan.

2. Se consideră expresia $E(x) = \left(\dfrac{2x-6}{x^2-4x+3} - \dfrac{x-2}{x^2-4x+4}\right) : \dfrac{x-3}{x-1}$, unde $x \in \mathbf{R} \setminus \{1, 2, 3\}$.

2p a) Arătați că $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$, pentru orice număr x.

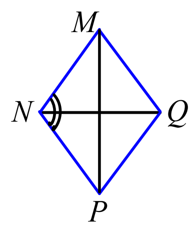
3p b) Demonstrați că $E(x) \cdot (x-2) = 1$, pentru orice $x \in \mathbf{R} \setminus \{1, 2, 3\}$.

3. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x - 6$.

2p a) Calculați $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot f(4)$.

3p b) Știind că reprezentarea grafică a funcției f intersectează axa Ox în punctul E și axa Oy în punctul F, calculați sinusul unghiului $\widehat{OEF}$.

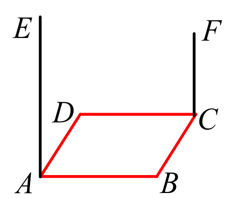
4. În figura alăturată este reprezentat un romb $MNPQ$ cu $MN = 6\,\text{cm}$ și $\widehat{MNP} = 120^\circ$.



2p a) Arătați că $NQ = 6\,\text{cm}$.

3p b) Calculați distanța de la punctul Q la dreapta NP.

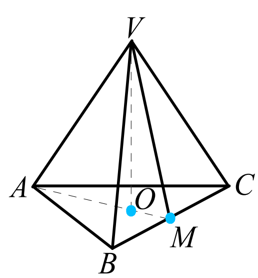
5. Pe planul pătratului $ABCD$ cu $AB = 4\,\text{cm}$, se construiesc, de aceeași parte a pătratului, perpendicularele AE și CF, astfel încât $AE = 2\sqrt{6}$ cm și $CF = 2\sqrt{2}$ cm.



2p a) Arătați că $AC = 4\sqrt{2}$ cm.

3p b) Demonstrați că unghiul dintre planele (EBD) și (FBD) are măsura egală cu 75°.

6. Se dă piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu latura bazei $AB = 12\,\text{cm}$, muchia laterală $VA = 8\,\text{cm}$ și M este mijlocul lui BC.



2p a) Determinați măsura unghiului dintre dreapta VA și planul (ABC).

3p b) Calculați distanța de la punctul A la dreapta VM.

TESTUL 2

- ***Toate subiectele sunt obligatorii.***
- ***Se acordă 10 p din oficiu.***
- ***Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.***

SUBIECTUL I Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

5p **1.** Rezultatul calculului $(1+2+3\cdot 4):5$ este:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

5p **2.** Maria a cumpărat 2 kilograme de mere cu prețul de 3 lei kilogramul și 3 kilograme de banane cu prețul de 8 lei kilogramul. Un kilogram de fructe cumpărat de Maria a costat:

a) 6 lei b) 8 lei c) 5 lei d) 4 lei

5p **3.** Numărul natural m pentru care $3^{2m+1}=243$ este:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

5p **4.** Numărul $3-\sqrt{2}$ aparține mulțimii:

a) $\mathbf{N}$ b) $\mathbf{Z}$ c) $\mathbf{Q}\setminus\mathbf{Z}$ d) $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$

5p **5.** La un test Ana a obținut nota 8, Ionuț a obținut nota 9, iar Dan a obținut nota 7. Dacă Irina a luat nota x, iar media notelor celor patru copii a fost $8,5$, atunci valoarea lui x este:

a) 7 b) 8 c) 9 d) 10

5p **6.** Suma modulelor numerelor întregi din intervalul $(-4;3]$ este egală cu:

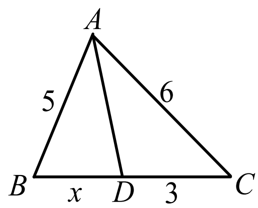
a) 10 b) 11 c) 12 d) 13

SUBIECTUL al II-lea Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

5p **1.** În figura alăturată, triunghiurile ABD și ACD au același perimetru.

Valoarea lui x este egală cu:

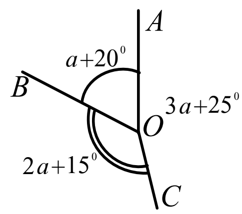
a) 2
b) 3
c) 4
d) 5



5p **2.** În figura alăturată avem trei unghiuri în jurul punctului O: $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ și $\widehat{COA}$.

Valoarea lui a este egală cu:

a) 50°
b) 60°
c) 70°
d) 80°



5p **3.** O bucătărie are forma unui dreptunghi cu lungimea 4,5 m și lățimea de 3 m. Bucătăria se placheazã cu plăci de gresie, sub formă de pătrat, cu lungimea laturii egală cu 3 dm. Numărul plăcilor de gresie necesare pentru a acoperi întreaga bucătărie este:

a) 1500 b) 120 c) 180 d) 150

5p **4.** Triunghiul isoscel ABC are baza $BC=10\,\text{cm}$ și $AB=AC=13\,\text{cm}$. Distanța de la punctul B la dreapta AC este egală cu:

a) $\dfrac{120}{13}$ b) 120 c) 60 d) $\dfrac{100}{13}$

5p **5.** Punctele M, N, P, Q sunt situate (în această ordine) pe cercul de centru O. Dacă $\overset{\frown}{MN}=60^\circ$, $\overset{\frown}{NP}=80^\circ$, $\overset{\frown}{PQ}=130^\circ$, atunci măsura unghiului $\widehat{MOQ}$ este egală cu:

a) 120° b) 70° c) 100° d) 90°

5p 6. Un patinoar are forma unui dreptunghi $ABCD$ cu lungimea de 20 m și lățimea de 10 m. Ana patinează pe traseul $A-D-C$, iar Bogdan patinează pe traseul $A-M-C$, unde M este mijlocul lui BC. Afirmația "traseul parcurs de Ana este mai lung decât traseul parcurs de Bogdan" este:

a) adevărată b) falsă

SUBIECTUL al III-lea Scrieți rezolvările complete. (30 de puncte)

5p **1.** Maria așează flori în mai multe vaze. Dacă pune câte 3 flori în fiecare vază, atunci toate vazele sunt pline, iar 5 flori nu au loc în vaze. Dacă pune câte 5 flori în fiecare vază, atunci într-o vază sunt 2 flori, iar celelalte vaze sunt pline. Câte flori și câte vaze sunt?

2. Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{1}{x^2-x}-\frac{1}{x^2+x}\right):\frac{1}{2x(x-1)}, x\in\mathbf{R}\setminus\{-1,0,1\}$.

2p a) Arătați că $E(x)=\frac{4}{x+1}$, pentru orice $x\in\mathbf{R}\setminus\{-1,0,1\}$.

3p b) Determinați cel mai mare număr natural n pentru care $E(n)\geq 1$.

3. Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=(2-\sqrt{5})x+\sqrt{5}$.

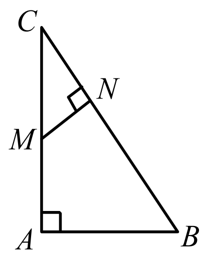
2p a) Arătați că punctul $A(1;2)$ aparține graficului funcției.

3p b) Rezolvați în $\mathbf{R}$ inecuația: $f(x)-2\geq 0$.

4. Triunghiul ABC este dreptunghic în A, $AB=6\text{ cm}$, $AC=8\text{ cm}$, M este mijlocul lui AC, iar $MN\perp BC$, $N\in BC$, $MN=2\text{ cm}$.

2p a) Arătați că $\widehat{C}=30°$.

3p b) Calculați aria patrulaterului $ABNM$.



5. Un vas în formă de prismă patrulateră regulată cu latura bazei 6 dm și înălțimea 3 dm, este plin cu apă. Apa din el se toarnă într-un vas în formă de piramidă patrulateră regulată $SABCD$ așezată cu vârful S în jos, cu $AB=8\text{ dm}$ și înălțimea $SO=12\text{ dm}$.

2p a) Aflați la ce înălțime se ridică apa în vasul în formă de piramidă regulată.

3p b) Dacă M este mijlocul lui SA, aflați tangenta unghiului pe care îl face dreapta MO cu planul (ABC).

6. Un garaj are forma unui paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB=3\text{ m}$, $BC=6\text{ m}$ și $BB'=2,5\text{ m}$, iar acoperișul are forma unei prisme triunghiulare regulate $A'B'ED'C'F$ cu bazele $A'B'E$ respectiv $D'C'F$. Garajul se vopsește pe exterior, iar acoperișul este de tablă.

2p a) Câte kilograme de vopsea sunt necesare, dacă 1 kg de vopsea acoperă 5 m^2? Cât costă vopseaua, știind că 1 kg de vopsea costă 25 de lei? (Se consideră $\sqrt{3}=1,73$. Rezultatul se va scrie cu două zecimale exacte)

3p b) Câți metri pătrați de tablă sunt necesari pentru a acoperi garajul, știind că pierderile sunt de 10% din suprafața acoperișului?

*

* *

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

1 INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN R

Lecția 1. **1** $B=\{0\}$; $C=\left\{-3;-2;0;\frac{91}{7}\right\}$; $D=\left\{-3;-2;-1;5;0;0,(3);\frac{3}{4};1\frac{2}{3};\frac{91}{7};\sqrt{6,25}\right\}$; $E=\{\sqrt{2};\pi\}$. **2** $A=\{x \mid x=n^2, n\in\mathbf{N}\}$; $B=\left\{x \mid x=\frac{n}{n+1}, n\in\mathbf{N}^*\right\}$; $C=\{x \mid x=\pm(n^2+1), n\in\mathbf{N}\}$; $D=\{x \mid x=7n, n\in\mathbf{N}\}$; $E=\{x \mid |x|=1, x\in\mathbf{Z}\}$. **3** $A=\left\{\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right\}$; $B=\varnothing$; $C=\{0\}$; $D=\{-3,3\}$. **4** a) $\left\{\frac{111}{3},\sqrt{16}\right\}$; b) $\left\{\frac{111}{3},\sqrt{16}\right\}$; c) $\left\{1,0(2);\sqrt{16};\frac{111}{3}\right\}$; d) $\{-\sqrt{7};1-\sqrt{2};\pi\}$; e) $\varnothing$; f) $\{1,0(2)\}$.

Lecția 2. **1** a) A; b) F; c) A; d) F; e) A; f) A; g) F. **2** $A=[-1,2]$; $B=(2,3)$; $C=[-1,3)$; $D=(2,4]$; $E=(-\infty,0]$; $F=[-2,\infty)$; $G=(-\infty,-\sqrt{2})$; $H=(\sqrt{3},\infty)$; $I=\left(-\frac{5}{3},-\frac{3}{2}\right)$; $J=(-\infty,1]$. **3** a) $[-1,1]$; b) $\mathbf{R}$; c) $[0,\infty)$; d) $(2,10)$; e) $\{4\}$; f) $\varnothing$. **4** $A=[-3,3]$; $B=(-4,4)$; $C=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$; $D=[0,3]$; $E=[0,2]$; $F=[1,\infty)$; $G=[-3,2)$. **5** a) $[3,4)$; b) $[-2,-1)$; c) $[-1,1)$. **6** a) 3; b) 3; c) 3 sau 4; d) -2 sau -1 sau 0. **8** a) F; b) A; c) A; d) A; e) F. **9** a) 9; b) 15; c) 8; d) 1; e) zero numere; f) 15; g) 8; h) 1; i) $2n-1$. **11** $A=[-5,5]$; $B=(-1,1)$; $C=[-2,6]$; $D=(-\infty,-2)\cup(4,\infty)$; $E=[0,\infty)$; $F=\{0\}$; $G=(-3,-1]\cup[1,3)$; $H=(-\infty,0]\cup[2,\infty)$. **12** a) A; b) F; c) F. **14** $A=\mathbf{R}$; $B=\left\{-\frac{11}{4},\frac{11}{4}\right\}$; $C=\varnothing$; $D=[5,6)$; $E=[-5,-4)$; $F=\left\{\frac{3}{2}\right\}$; $G=[2;2,5]$. **15** Se arată că $a<\frac{5a+b}{6}<\frac{a+5b}{6}<b$. **16** a) A; b) A; c) A; d) A. **18** a) Se arată că: $a<\frac{2a+b}{3}<b$; b) $8a<3a+5b<8b$. **19** 6543210.

Lecția 3. **3** a) $\{0,1,2,\ldots,15\}$; b) $\{0,1,2\}$; c) $\mathbf{N}$; d) $\varnothing$. **5** a) $\left[\frac{5}{3},\infty\right)$; b) $\left(-\infty,\frac{4}{3}\right)$; c) $[21,\infty)$; d) $[-1,7]$; e) $[-1,\infty)$; f) $(-\infty,1]$; g) $\left(-\infty,\frac{18}{11}\right)$. **6** a) $(-\infty,19)$; b) $(-\infty,4]$; c) $[0,2]$. **9** a) $(-\infty,-1)$; b) $\left[\frac{1}{2},\infty\right)$; c) $\left(-\infty,\frac{7}{3}\right]$; d) $(-\infty,13]$; e) $\left(-\infty,\frac{5}{4}\right]$. **19** a) $\left(-\infty,\frac{4}{3}\right]$; b) $(\sqrt{2},\infty)$; c) $(4\sqrt{3},\infty)$; d) $\left(-\infty,\frac{2\sqrt{15}}{5}\right)$. **20** $A=\{0,1,2,\ldots,7\}$; $B=\{1,2,3,4,5\}$; $C=\left(\frac{1}{5},\infty\right)$; $D=\varnothing$; $E=\{0,1\}$; $F=\{-2,-1,0\}$. **21** a) $\{1,2,3,4,5\}$; b) $(-\infty,5]$; c) -1.

Lecția 4. **6** 1; 6; 32. **7** este cuprinsă între 24 și 84. **8** mai mic decât 48 km. **9** $L\in(5,30)$. **10** $x\in[-110,+\infty)$. **11** numărul maxim de bile este 28. **12** numărul minim de autobuze este 14.

PROBLEME RECAPITULATIVE

1 -3. **2** $\frac{7}{30}$. **3** a) $\frac{11}{101}$; b) $1-\frac{11}{101}$; c) $\frac{76}{101}$. **4** $a+2\in(3,5)$; $2a\in(2,6)$; $a-4\in(5,7)$; $-a\in(-3,-1)$. **5** 100π. **6** 2345, 15. **7** $x\in[2,03;2,04)$. **8** $x\in[3,255;3,265)$. **9** $n\in\{4,5,6,7,8\}$. **11** 374. **12** $A=B=[-1,1)$. **13** $[-4,5]$.

TEST DE AUTOEVALUARE

SUBIECTUL I 1 5. 2 -6. 3 $[-6;4]$. 4 $[2;6]$. 5 $\{0,1,2\}$. 6 $[6,\infty)$. **SUBIECTUL al II-lea** 1 **D.** 2 **A.** 3 **B.** 4 **B.** 5 **A.** 6 **C.**

SUBIECTUL al III-lea 1 a) $a=\frac{2}{7}$; b) $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}<\frac{2}{7}<\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. 2 a) $A=[-1;2]$; $B=(-3,0)$; b) $\{-1,0,1,2\}$; $\varnothing$; $(-3,2)$; $[-1;0)$. 3 a) 80; b) 94.

2 CALCUL ALGEBRIC ÎN R

Lecția 1. **9** a) x^2-2x+1; b) $x^2+2xy+y^2$; c) x^2+3x+2; d) $x^2+5ax+6a^2$; e) $x^4-7ax^2+10a^2$; f) x^4-5x^2-14; g) $3x^5+2x^4+2x^2-1$; h) $6a^2+2ab+4b^2$. **10** 1. **12** 1. A; 2. F; 3. A. **13** 20%. **14** a) Se arată că $(100x+25)\cdot(100y+25)=100z+25$; b) $(100x+76)\cdot(100y+76)=100z+76$. **15** 1.

Lecția 2. **6** k) $96\cdot104=(100-4)\cdot(100+4)=100^2-16=9984$; l) $37\cdot43=(40-3)(40+3)=40^2-3^2=1591$; m) 1; n) 1.

7 j) $99^2+100^2+101^2-3\cdot99\cdot101=(99^2-2\cdot99\cdot101+101^2)+100^2-(100-1)\cdot(100+1)=(99-101)^2+100^2-100^2+1=5$; k) -98; l) -10; m) $(100+5)^2=11025$; n) $(200-2)^2+(200+2)^2-(200-2)(200+2)=200^2+12=40012$.

10 a) $2(\sqrt{6}+\sqrt{2})-\sqrt{6}+1-5(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{6}-\sqrt{2})=-2(2+\sqrt{2})$; b) $9+5\sqrt{3}-12+6\sqrt{3}+6+3\sqrt{3}+12-8\sqrt{3}=3(5+2\sqrt{3})$.

11 $S=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\sqrt{n}-1$ etc. **14** a) $5^2-2=23$; b) $23^2-2=527$. **15** $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4$ etc.

Lecția 3. **2** k) $(5a+2b)^2$; l) $(a\sqrt{3}+b\sqrt{2})^2$; m) $(a^2\sqrt{2}+1)^2$; n) $(a^2+a\sqrt{5})^2=a^2(a+\sqrt{5})^2$. **3** d) $(3\sqrt{3}-x)(3\sqrt{3}+x)$; e) $(2x\sqrt{2}-\sqrt{3})(2x\sqrt{2}+\sqrt{3})$. **5** a) $a^4+a^2+1=(a^2+1)^2-a^2=(a^2-a+1)\cdot(a^2+a+1)$; b) $a^4+1=(a^2+1)^2-2a^2=$ $=(a^2-a\sqrt{2}+1)(a^2+a\sqrt{2}+1)$; c) $a^4-a^2+1=(a^2+1)^2-3a^2=(a^2-a\sqrt{3}+1)(a^2+a\sqrt{3}+1)$; d) $x^4+64=(x^2+8)^2-16x^2=$ $=(x^2-4x+8)(x^2+4x+8)$; e) $x^4+4x^2+16=(x^2+4)^2-4x^2=(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)$; f) $a^4+9a^2+81=(a^2+9)^2-9a^2=(a^2-3a+9)(a^2+3a+9)$;

g) $x^2+3x+2+ax+a=(x+1)(x+2)+a(x+1)=(x+1)(x+2+a)$; h) $x^2-4x+3-bx^2+b=(x-1)(x-3)-b(x-1)(x+1)=(x-1)(x-3-bx-b)$.

6 $x^2+12+35=(x+5)(x+7)$ etc. **7** $x^2+6x+9-2=(x+3)^2-2=(x+3-\sqrt{2})(x+3+\sqrt{2})$. **8** $x^2+8x+13=x\sqrt{2}+8x+16-3=(x+4)^2-3=$ $=(x+4-\sqrt{3})(x+4+\sqrt{3})$etc. **9** a) $(3^n+2)^2$; b) $(6^n-3)^2$; c) $(k^2+3k+1)^2$; d) $(n^2+n-2)^2$. **10** a) $(x-y)(x+y)=97$; Deci $x-y=1$ și $x+y=97$ etc.; b) $(x-y)(x+y)=97^2$ etc. **13** $a=(n+2)((n+2)^2-1)=(n+1)(n+2)(n+3)$ etc. **14** b) $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}=\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geq 2+2+2$; c) $\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right)\geq 2\cdot2\cdot2$ etc. **15** $a^4+b^4=c^4+2a^2b^2$ echivalent cu $(a^2-b^2)^2-c^4=0$, sau $(a^2-b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)=0$ etc.

16 $\frac{(7^{2n}+3)^2}{7^{2n}+3}-3=7^{2n}=(7^n)^2$. **17** $(x-5)^2+(y+7)^2\leq0$, de unde $x=5$ și $y=-7$.

Lecția 4. **1** b) $D = \mathbf{R}\setminus\{3\}$. **2** $D = \mathbf{R}\setminus\{-3,0\}$ și deci răspunsul este negativ. **5** a) $-7x^2$; b) $\frac{x+2}{2}$; c) $x-2$; d) $\frac{x+1}{x-1}$; e) $\frac{x-2}{x+2}$; f) $\frac{2x-1}{2x+1}$; g) $\frac{1}{x+1}$; h) $\frac{x-1}{x^2}$; i) $\frac{a+b}{x-1}$. **6** $n+3 \in \mathbf{N}$. **7** $\frac{3}{a+1} \in \mathbf{Z}$, dacă $a+1 \in \{\pm1, \pm3\}$ etc. **8** a) $n \in \mathbf{Z} \in \mathbf{N}$; b) $\frac{6}{2n+3} \in \mathbf{Z}$, dacă $2n+3 \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}$ etc. **13** $a = (x+3+x-3)^2 = (2x)^2$.

Lecția 5. **2** b) Se aplică punctul a) fiecărei fracții. **3** a) 16, pentru $x \in \mathbf{R}^*$; b) $\frac{xy}{6}$, pentru $x, y \in \mathbf{R}^*$; c) $\frac{x-4}{x+4}$, pentru $x \in \mathbf{R}\setminus\{-4,4\}$; d) $\frac{2}{x-5}$, pentru $x \in \mathbf{R}\setminus\{-5,5\}$. **4** a) $4ax^2$, pentru $x, a \in \mathbf{R}^*$; b) $\frac{3}{2}$, pentru $x \in \mathbf{R}^*$; c) $\frac{x+1}{x+2}$, pentru $x \in \mathbf{R}\{1, -2, 2\}$; d) 1, pentru $x \in \mathbf{R}\setminus\{\pm2, -1, 5\}$. **7** a) $\frac{x-2}{2}$, pentru $x \in \mathbf{R}\setminus\{0,2\}$; b) $-\frac{1}{x-2}$, pentru $x \in \mathbf{R}\setminus\{\pm2\}$. **15** a) $E(x) = \frac{x^2+9}{x}$, pentru $x \in \mathbf{R}\setminus\{-1,0,1\}$; b) Pentru $x > 1$ avem $\frac{x^2+9}{x} \geq 1$, echivalent cu $(x-3)^2 \geq$ ≥ 0; c) $E(x) = x + \frac{9}{x} \in \mathbf{Z}$ dacă $x \in \{\pm1, \pm3, \pm9\}$. **16** $\frac{1}{x} + \frac{2}{x-2} + \frac{4}{x^2-2x} = \frac{3}{x}$ etc. **18** a) $x \in \mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$; c) Cum $x \in \mathbf{N}$, avem $\frac{3-x}{x+1} \geq 0$, dacă $3-x \geq 0$. Deci $x \in \{0,2,3\}$; d) $E(x) = -1 + \frac{4}{x+1} \in \mathbf{N}$, dacă $x+1 \in \{1,4\}$, adică $x \in \{0,3\}$.

TEST DE AUTOEVALUARE

SUBIECTUL I [1] 6. [2] $3x(x-2)$. [3] $\frac{x+3}{3}$. [4] 3. [5] $\frac{5}{2}$. [6] -1. **SUBIECTUL al II-lea** [1] **A.** [2] **D.** [3] **C.** [4] **B.** [5] **C.** [6] **C.**
SUBIECTUL al III-lea [1] a) $E(x) = x^2+4x-12 = (x+2)^2 - 16 = (x-2)(x+6)$; b) $E(x) = (x+2)^2 - 16 \geq 16$. [2] b) $x \in \{1;2\}$.

Lecția 6. **7** $a \in \{-1,2\}$. **8** a) $\{-10,10\}$; b) $\varnothing$; c) $\left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$; d) $\{0, \sqrt{3}\}$; e) $\{0,7\}$; f) $\left\{0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$. **9** h) $\left\{2, \frac{1}{2}\right\}$; i) $\{12\}$. **10** f) $\{\pi, 1-\pi\}$; g) $\{-1, \pi\}$; h) $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$. **11** $m \in \{\pm2\}$ etc.

Lecția 7. **6** $x = 4$. **7** $a \in \{-8,6\}$. **8** $n = 11$. **10** $n = 16$.

TEST DE AUTOEVALUARE

SUBIECTUL I [1] $0, -\frac{3}{2}$. [2] $\left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right\}$. [3] $\{-5,4\}$. [4] $\varnothing$. [5] 4. [6] $8\sqrt{3}$ cm. **SUBIECTUL al II-lea** [1] **D.** [2] **B.** [3] **A.** [4] **D.** [5] **B.** [6] **A.**
SUBIECTUL al III-lea [1] $x_1 = \frac{9-\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = \frac{9+\sqrt{3}}{3}$; [2] a) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$; b) $x = 1$; c) $E(x) = (2x+1)^2 + 4$ rezultă $\min E(x) = 4$.
[3] a) $m = -1$; b) $m \in (-2, \infty)$.

3 FUNCȚII

Lecția 1. **7** a) $p(x) = \frac{10-x}{10} = 1 - \frac{x}{10}$; c) $x = 4$; d) $\frac{9}{10}$ valoarea maximă; $\frac{1}{10}$ valoarea minimă. **8** b) valoarea minimă -30; valoarea maximă 50; c) $f(n) = 5 \cdot n - 3(10-n) = 8n - 30$. **9** $\frac{1}{27}$. **10** f și g au același domeniu de definiție, același codomeniu și în plus $f(-1) = g(-1) = 1$, $f(0) = g(0) = 0$, $f(1) =$ $= g(1) = 1$. **11** $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$. **12** $d(n) = \frac{n(n-3)}{2}$. **15** a) $\mathrm{Im} f = \{3, 2, 0, -2\}$. **16** a) $\mathrm{Im} f = \{6, 9, 12\}$. **17** a) $B = \{0,1,2,3,4\}$; b) $B = \{3,2,1\}$.

Lecția 2. **3** $A = \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$; $B = \{1,2\}$. **6** a) $a = -4$; b) $b = 1$; c) $c = \frac{5}{4}$; d) $\left(\frac{10}{7}, \frac{5}{7}\right)$; e) $\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)$. **9** a) 5 elevi; b) 14 elevi; c) nota 8; d) nota 5; e) 7, 12.

Lecția 3. **3** a) $(5,0), (0,5)$; b) $(2,0), (0,-1)$. **4** g. **5** $f(x) = 2x - 5$. **6** a) $m \in \{0,1\}$; b) $m = 0$; c) $m^2 = 1$, de unde $m \in \{-1,1\}$. **8** $A\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ și $B(0,4)$. **9** Reprezentările grafice sunt trei drepte paralele.

Lecția 4. **1** $C(5,4)$. **3** $f(3) = 2$ reprezintă valoarea minimă, iar $f(-1) = 6$ reprezintă valoarea maximă. **4** Triunghiul dreptunghic AOB unde $A(0,-2)$, $O(0,0)$, $B(2,0)$, are perimetrul $P = 4 + 2\sqrt{2}$ (unități) și aria $\mathcal{A} = 2$ (unități pătrate). **5** a) $f(0) = g(0) = 1$; c) triunghiul ABC cu $A(-1,0)$, $B(0,1)$, $C(1,0)$. **6** $f(x) = 1 - x$. **7** b) $A(-1,1)$, $B(1,1)$. **8** $A = (-1,3)$. **9** $f(1) = m - 1$, de unde $m = 0$. **10** $I = (3,8)$. **11** $f(2) = 1$. **12** a) $x = -1$; b) $x \in \varnothing$; c) $x = -\frac{1}{5}$; d) $x = -\frac{2}{3}$; e) $x \in \left\{-1, -\frac{1}{3}\right\}$. **13** a) $x = 4$; b) $x \in \varnothing$; c) $y = -3$; d) $y = 4$; e) $x \in \varnothing$; f) $x \in \{0,1,2,3,4,5\}$. **15** a) $m = 1$; b) $A(1,0)$, $B(0,1)$; d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; e) $\frac{1}{2}$; f) $45°$.

Lecția 5. **1** a) A, B, C necoliniare; b) A, B, C coliniare. **2** $A = (-2,-5)$. **3** $A(0, -3\sqrt{3})$, $O(0,0)$, $B(3,0)$. $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$; $60°$. **4** a) $A(-1,1)$; b) $B(-2,0)$, c) $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$, $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{4}$; c) $D(0,2)$, $P_{ACOD} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{2} + 2 + \sqrt{2}$. **5** Pentru $m = 2$, $A(-n,-n)$; pentru $m = 1-n$, $B(1,1)$; pentru $m = 1+n$, $C(-1,-1)$. **6** a) $90°$; $45°$; b) $\mathcal{A} = 2$; $p = 4 + 2\sqrt{2}$. **7** Ecuația $f(x) = g(x)$ nu are soluții. **8** a) $A(2,0)$, $B(4,8)$, $C(6,0)$, $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = 16$; b) $D(0,-8)$, $B(4,8)$, $E(0,24)$, $\mathcal{A}_{\Delta DBE} = 64$; c) $\mathrm{tg}\, x = 4$. **9** a) $A(-1,-1)$, $B\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$; b) $S = 651$.

PROBLEME RECAPITULATIVE

1 b) $f(x) = 2x - 1$. **3** $a = -3$. **5** A, D. **6** a) $A(-4,11)$; b) $B(4,-5)$; c) $C(1,1)$. **8** a) $a = b = 3$. Distanța de la O la reprezentarea geometrică a graficului funcției f este $\frac{9\sqrt{10}}{10}$, iar pentru funcția g este $\frac{3\sqrt{26}}{26}$. **9** $a = -2$. **10** a) $A(0, -\sqrt{2})$, $O(0,0)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$; $\mathcal{A}_{\Delta AOB} = \frac{\sqrt{6}}{6}$; b) $\frac{\sqrt{14}}{7}$; c) $\sqrt{6}$. **11** b) Reprezentările grafice sunt două câte două paralele; c) $A(1,2)$, $B(5,2)$, $C(2,-1)$, $D(-2,-1)$, $\mathcal{A}_{\Delta ABCD} = 12$. **13** $\mathrm{Im} f = (-1, \infty)$. **14** $I = [0,3]$; $a = 3$, $b = 3$. **16** $A(x) = 3x$, $x > 0$.
20 Domeniul de definiție: $\{-3, -2, 1, 3, 4\}$. Mulțimea valorilor: $\{-2, -1, 2\}$.

TEST DE AUTOEVALUARE

SUBIECTUL I [1] -5. [2] 3. [3] 1. [4] 0. [5] -2. [6] 2. **SUBIECTUL al II-lea** [1] **C.** [2] **B.** [3] **D.** [4] **C.** [5] **A.** [6] **C.**
SUBIECTUL al III-lea [1] a) $a = 1$, $b = 2$; b) $A(-2,0)$; c) $\sqrt{2}$. [2] a) $f(1) = 2$; b) $x \in (-\infty, 1]$; c) $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$. [3] b) $90°$; c) 5.

4 ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

Lecția 1. **5** c). **6** 37 paralelipipede dreptunghice mici.

Lecția 2. **1** a) o infinitate; b) o infinitate. **2** a) $C \in a$; b) $CD \subset a$. **3** a) F; b) A; c) F; d) A; e) F; f) F. **4** a) A; b) F; c) A; d) A; e) A. **5** a) Nu; b) 6 drepte; **6** 4 plane. **7** a) A; b) F; c) A; d) A; e) A; f) F. **8** a) A; b) A; c) A; d) A. **10** a) A; b) A; c) A; d) A; e) F. **11** AB; b) AC; c) BC; d) $AB \subset (ABC)$ și $AB \subset (ABD)$.

12 Numărul maxim de drepte este 6; numărul minim de drepte este 4. **15** 3 plane. **17** $(EAC)\cap(EBD)=EO$, unde $\{O\}=AC\cap BD$.

Lecția 3. **4** $100\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. **5** 4 triunghiuri echilaterale. **6** p: A; q: F. **7** b) $(ABN)\cap(CDM)=MN$. **12** a) 36 cm; b) $36\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

Lecția 4. **4** $\sqrt{6}$ cm. **5** $192\cdot(2+\sqrt{3})\,\text{cm}^2$. **7** $32\cdot(6+\sqrt{3})\,\text{cm}^2$. **8** $AB=36\,\text{cm}$, $CD=6(2\sqrt{3}+1)\,\text{cm}$. **11** b) 13 cm.

Lecția 5. **1** $80\pi\,\text{cm}^2$. **2** $\sqrt{36\pi^2+64}$ cm. **3** $96\pi\,\text{cm}^2$. **4** 8 cm. **5** 20 cm. **7** $12\pi\,\text{cm}^2$, $R_{con}=2\,\text{cm}$.

Lecția 6. **1** a) 90°. b) 45°; c) 90°; d) 90°; e) 60°; f) 60°. **2** a) 60°; b) 90°; c) 45°; d) 90°. **3** a) 60°; b) 45°; c) 30°. **4** a) 90°; b) 0°; c) 45°; d) 60°. **5** a) 60°; b) 90°; c) 90°; d) 60°; e) 60°. **6** a) 45°; b) 60°; c) 90°. **7** a) 60°; b) 90°; c) 60°; d) 30°; e) 90°; f) 60°.

Lecția 7. **1** a) paralele; b) necoplanare; c) paralele; d) paralele; e) necoplanare; f) paralele; g) concurente; h) concurente. **2** a) VB, VC, AB, AC; b) VA și BC; VB și AC; VC și AB. **3** a) necoplanare; b) paralele; c) necoplanare; d) necoplanare; e) necoplanare; f) concurente; g) paralele. **4** Se arată că $MN\parallel PQ$ sau $MQ\parallel NP$. **5** a) $AB\parallel(DCD')$, $AB\subset(DCA)$, $AB\cap(DD'A')=\{A\}$, $AB\cap(DD'B)=\{B\}$, $AB\subset(A'B'A)$; b) $AC\subset(ADB)$, $AC\cap(DBD')=\{O\}$, $\{O\}=AC\cap BD$, $AC\cap(BB'C)=\{C\}$, $AC\cap(DCD')=\{C\}$, $AC\cap(DBB')=\{O\}$, $AC\cap(A'B'D')=\varnothing$. **6** a) $MO\parallel VC$, $VC\subset(VDC)$, rezultă $MO\parallel(VDC)$; b) $MO\parallel VC$, $VC\subset(VBC)$, rezultă $MO\parallel(VBC)$; c) $VC\parallel MO$, $MO\subset(MBD)$, rezultă $VC\parallel(MBD)$. **7** a) $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\overset{R.T.Thales}{\Rightarrow}MN\parallel BC$, $BC\subset\alpha$, rezultă $MN\parallel\alpha$; b) $\frac{AM}{MB}\neq\frac{AN}{NC}$, rezultă $MN\cap BC=\{P\}$, rezultă $MN\cap\alpha=\{P\}$. **8** a) $MC\parallel NO$, $NO\subset(NBD)$, rezultă $MC\parallel(NBD)$; b) $NO\parallel MC$, $MC\subset(BMC)$, rezultă $NO\parallel(BMC)$; c) $NO\cap(BMD)=\{O\}$. **9** $MN\parallel\alpha$. **10** a) $MN\parallel AC$, $AC\subset(ABC)$, rezultă $MN\parallel(ABC)$; b) $AC\parallel MN$, $MN\subset(MNB)$, rezultă $AC\parallel(MNB)$. **11** a) concurente; b) necoplanare; c) necoplanare; d) paralele; e) necoplanare; f) concurente; g) necoplanare. **12** a) $AD\parallel MN$, rezultă că A,D,M,N sunt coplanare; b) AD, VB necoplanare, $AD\parallel BC$; AB, VA concurente. **13** $AA'\cap(ABC)=\{A\}$; $AA'\parallel(CBB')$; $AA'\subset(ABB')$; $AA'\cap(BCA')=\{A'\}$. **15** $G_1G_2\parallel BC$, $BC\subset(ABC)$, rezultă $G_1G_2\parallel(ABC)$. **17** Fie $AF\cap BD=\{P\}$. Rezultă $EF\parallel CP$, $CP\subset(BCD)$, deci $EF\parallel(BCD)$. **18** $\frac{MB}{BA}=\frac{MT}{TA}=\frac{MT}{TE}=\frac{MC}{CE}$. Rezultă $BC\parallel AE$, $AE\subset(ATE)$, deci $BC\parallel(ATE)$. **20** a) $OO'\parallel CC'$, $CC'\subset(CDD')$, rezultă $OO'\parallel(CDD')$; b) $AO'\parallel C'O$, $C'O\subset(BC'D)$, rezultă $AO'\parallel(BC'D)$. **22** $x=10$. **23** a) $OM\parallel SA$, $SA\subset(SAD)$, rezultă $OM\parallel(SAD)$; b) $MN\parallel CD$, $CD\subset(ABC)$, rezultă $MN\parallel(ABC)$; c) $ON\parallel SB$, $SB\subset(SBA)$, rezultă $ON\parallel(SBA)$; d) $ON\parallel SB$, $SB\subset(SBM)$, rezultă $ON\parallel(SBM)$. **25** a) $BB'\parallel(ACC')$; b) $EF\subset(ABC')$. **26** a) $RS\parallel AB$, $AB\subset(ABC)$, rezultă $RS\parallel(ABC)$; b) $PS\parallel CD$, $PS\subset(PRS)$, rezultă $CD\parallel(PRS)$. **27** a) $OM\parallel AC'$, $AC'\subset(ACC')$, rezultă $OM\parallel(ACC')$; b) $AC'\parallel OM$, $OM\subset(OMC)$, rezultă $AC'\parallel(OMC)$. **28** b) $FC\parallel MN$, $MN\subset(MNG)$, rezultă $FC\parallel(MNG)$.

Lecția 8. **3** $A'B'\parallel AB$, $B'C'\parallel BC$, $AB,BC\subset(ABC)$, $A'B'\cap B'C'=\{B'\}$, rezultă $(A'B'C')\parallel(ABC)$. **4** a) $PN\parallel AB$, $MN\parallel AC'$, $AB,AC'\subset(C'AB)$, rezultă $(MNP)\parallel(C'AB)$. **5** b) $\mathcal{A}_{MNPQ}=900\,\text{cm}^2$. **7** a) A; b) F; c) A; d) A; e) A; f) A; g) F. **8** $MN\parallel BC$, $MO\parallel EC$; $BC,EC\subset(BEC)$, rezultă $(MNO)\parallel(BEC)$. **9** a) $MN\parallel AB$, $NP\parallel BC$, $AB,BC\subset(ABC)$, rezultă $(MNP)\parallel(ABC)$; b) $\mathcal{A}_{\Delta MNP}=\frac{100\sqrt{3}}{9}\,\text{cm}^2$.

TEST DE AUTOEVALUARE

SUBIECTUL I 1 $d\cap\alpha=\varnothing$. 2 paralele. 3 paralele. 4 AA_1 și BB_1. 5 Fals. 6 $d_1\parallel d_3$ sau $d_1=d_3$. **SUBIECTUL al II-lea** 1 **B.** 2 **D.** 3 **A.** 4 **B.** 5 **B.** 6 **A.** **SUBIECTUL al III-lea** a) $G_1G_2\parallel AC$, $AC\subset(ABC)$, deci $G_1G_2\parallel(ABC)$; b) $P_{\Delta ABC}=108\,\text{cm}$; c) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Lecția 9. **1** b) $P_{secțiunii}=8\sqrt{2}$ cm, $A_{secțiunii}=8\,\text{cm}^2$. **3** $A_{MNPQ}=12{,}5\,\text{cm}^2$, $P_{MNPQ}=10\sqrt{2}$ cm. **5** b) $\frac{NB'}{NB}=\frac{2}{3}$; $\frac{PC}{CC'}=\frac{3}{5}$. **6** $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=64\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. **7** $A'B'=8\,\text{cm}$. **8** $\frac{A_{\Delta MNP}}{A_{\Delta BCD}}=\frac{1}{16}$. **9** $25\pi\,\text{cm}^2$.

Lecția 10. **3** $BD=6\sqrt{2}$ cm; $DC=10\,\text{cm}$; $DM=\sqrt{61}$ cm. **4** $MB=\sqrt{281}$ cm; $MC=\sqrt{506}$ cm; $MD=5\sqrt{10}$ cm. **5** $MB=6\sqrt{11}$ cm; $MC=6\sqrt{29}$ cm; $MD=6\sqrt{11}$ cm. **6** $2\sqrt{6}$ cm. **7** $MB=6\sqrt{2}$ cm; $MC=12\,\text{cm}$; $MD=6\sqrt{5}$ cm; $MP=2\sqrt{30}$ cm. **8** $A'C=6\sqrt{3}$ cm; $A'M=9\,\text{cm}$; $OM=3\sqrt{5}$ cm; $OC'=3\sqrt{6}$ cm. **9** $2\sqrt{5}$ cm.

Lecția 11. **1** $5\sqrt{21}$ cm. **2** $\frac{\sqrt{501}}{3}$ cm. **3** $VA=4\sqrt{3}$ cm, $VM=\sqrt{39}$ cm. **4** a) 6 cm; b) 4 cm; c) $2\sqrt{2}$ cm. **5** a) 10 cm; b) $5\sqrt{2}$ cm. **6** b) $25\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. **7** 8 cm. **8** $x=6{,}5\,\text{cm}$. **9** $G=5$. **10** $17\sqrt{2}$ cm. **11** $\sqrt{41}$ cm. **12** $6\sqrt{2}$ cm. **13** 6 cm. **14** a) $8\sqrt{2}$ cm; b) $8\sqrt{2}$ cm. **15** 3 cm. **16** a) 12 cm; b) 6 cm. **17** a) $4\sqrt{2}$ cm; b) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm. **18** a) 6 cm; b) 0.

Lecția 12. **1** 6 cm. **2** a) 3 cm; b) $24\,\text{cm}^2$. **3** a) 10 cm; b) $2\sqrt{38}$ cm. **4** b) $2\sqrt{3}$ cm. **5** b) $2\sqrt{3}$ cm. **6** 4 cm. **7** $36\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. **8** a) 3 cm; b) $\frac{1}{3}$ cm.

TEST DE AUTOEVALUARE

SUBIECTUL I 1 paralele. 2 perpendiculare. 3 4 cm. 4 8 cm. 5 $2\sqrt{2}$ cm. 6 AC. **SUBIECTUL al II-lea** 1 **A.** 2 **B.** 3 **D.** 4 **B.** 5 **A.** 6 **C.** **SUBIECTUL al III-lea** b) Dacă D este mijlocul muchiei BC, rezultă $BC\perp SD$, $BC\perp AD$, $SD,AD\subset(SAD)$, rezultă $BC\perp(SAD)$; c) $\sqrt{601}$ cm.

Lecția 13. **1** a) $\{A\}$; b) $\{B\}$; c) $\{B'\}$; d) $\{A\}$; e) $\{B\}$; f) $\{A\}$; g) segmentul AB; h) segmentul AB; i) segmentul BD; j) $\{B'\}$; k) segmentul AC; l) segmentul DB; m) segmentul AD'; n) segmentul BC'. **2** a) $\{O\}$; b) $\{A\}$; c) $\{A\}$; d) AO; e) OB. **3** a) AB; b) BC; c) $B'C'$; d) $B'C'$; e) $\{M\}$; g) MC; h) NC'; i) AM; j) AM; k) MN; l) AB. **6** a) $\{D\}$; b) $\{C'\}$; c) $\{C'\}$; d) segmentul DB; e) segmentul DA'; f) CB'; g) AB'; h) segmentul $D'O$, unde $\{O\}=AC\cap BD$. **8** b) *i)* VO; *ii)* VO; *iii)* VO.

Lecția 14. **1** a) $10\sqrt{2}$ cm; b) 10 cm; c) $10\sqrt{3}$ cm. **2** a) $4\sqrt{3}$ cm; b) 30°. **3** a) 30°; b) 15 cm. **4** $5\sqrt{3}$ cm; 5 cm; $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ cm. **5** a) 45°; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **6** a) 30°; b) $\frac{2}{3}$; c) $\sqrt{21}$ cm. **7** a) 60°; b) $2\sqrt{3}$ cm. **8** a) $2\sqrt{3}$ cm; b) $2\sqrt{39}$ cm. **9** a) $2\sqrt{3}$ cm; b) 60°. **10** $pr_\alpha AB=OB=9\sqrt{3}$ cm; $pr_\alpha AC=OC=3\sqrt{3}$ cm; $pr_\alpha BC=BC=12\sqrt{3}$ cm. **11** $2\sqrt{15}$ cm. **12** 45°.

Lecția 15. **2** 10 cm; 10 cm; $2\sqrt{17}$ cm. **3** $d(M,AB)=d(M,CD)=6\sqrt{5}$ cm; $d(M,AD)=d(M,BC)=2\sqrt{37}$ cm. **4** $3\sqrt{17}$ cm. **5** $3\sqrt{7}$ cm; 12 cm; $3\sqrt{7}$ cm. **6** $4\sqrt{2}$ cm. **7** $3\sqrt{13}$ cm; $3\sqrt{13}$ cm; $3\sqrt{13}$ cm. **8** a) $4\sqrt{2}$ cm; b) $4\sqrt{10}$ cm; c) 4 cm; d) $8\sqrt{2}$ cm; e) $\sqrt{39}$ cm. **10** $d(P,AB)=10$ cm; $d(P,BC)=4\sqrt{5}$ cm; $d(P,CD)=\sqrt{73}$ cm; $d(P,AD)=8\sqrt{2}$ cm. **11** a) 12 cm; b) $6\sqrt{2}$ cm. **12** a) $2\sqrt{41}$ cm; b) $\frac{6\sqrt{82}}{5}$ cm. **13** a) $\frac{2\sqrt{661}}{5}$ cm; b) $\frac{\sqrt{661}}{\sqrt{29}}$ cm; c) $\frac{2\sqrt{661}}{\sqrt{109}}$ cm.

Lecția 16. **2** a) $45°$; b) $45°$; c) $45°$; d) $90°$. **3** a) $60°$; b) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$; c) 667,2 lei. **4** $60°$. **5** $30°$. **6** a) $60°$; b) $90°$; c) $90°$. **7** $60°$. **8** a) $60°$; b) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$; c) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **9** a) $60°$; b) $60°$; c) $\frac{\sqrt{15}}{3}$. **10** $30°$. **11** a) $30°$; b) $45°$. **12** a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $60°$; c) $\frac{3}{2}$. **13** a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lecția 17. **2** a) 6 cm; b) $3\sqrt{2}$ cm. **3** a) $8\sqrt{5}$ cm; b) $8\sqrt{3}$ cm; c) $\frac{16\sqrt{5}}{5}$ cm. **4** a) 50 cm; b) $10\sqrt{17}$ cm; c) $\frac{60\sqrt{34}}{17}$ cm. **6** $5\sqrt{10}$ cm. **10** a) $\sqrt{137}$ cm; b) $\frac{\sqrt{209}}{3}$ cm; c) $\frac{3}{\sqrt{137}}$; d) $\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{209}}$.

Lecția 18. **1** $6\sqrt{3}$ cm. **2** 19,2 cm; 24 cm; $\frac{24\sqrt{5}}{5}$ cm. **3** $10\sqrt{5}$ cm; $4\sqrt{5}$ cm. **4** a) 2,4 cm; b) $\frac{6\sqrt{10}}{5}$ cm. **5** a) $3\sqrt{2}$ cm; b) $\frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{13}}$.

TEST DE AUTOEVALUARE

SUBIECTUL I 1 AC. 2 $\sqrt{2}$. 3 3 cm. 4 4 cm. 5 $45°$. 6 $60°$. **SUBIECTUL al II-lea** 1 **B.** 2 **C.** 3 **A.** 4 **D.** 5 **B.** 6 **A.**
SUBIECTUL al III-lea a) $2\sqrt{2}$ cm; b) $AO\perp(BDD')$, $AO\subset(AD'O)$, de unde $(AD'O)\perp(BDD')$; c) Drumul parcurs de furnică are lungimea $4\sqrt{10}$ cm, $4\sqrt{10}<13$.

5 ARII ȘI VOLUME ALE UNOR CORPURI GEOMETRICE

Lecția 1. **1** a) 8 cm; b) 48 cm^2. **2** a) $32\sqrt{3}$ cm^2; b) $AC'\perp(A'BD)$. **3** b) $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **4** b) $3\sqrt{3}$ cm; c) $\sqrt{6}$ cm. **5** a) $4\sqrt{2}$ cm, $3\sqrt{5}$ cm, 2 cm; b) $BC\perp(ABB'A')$; c) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$. **6** a) $6\sqrt{85}$ cm^2; b) $\frac{21\sqrt{2}}{11}$ cm; c) $90°$. **7** a) $\frac{\sqrt{15}}{5}$; b) $6\sqrt{3}$ cm; c) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$. **8** a) 5 cm; b) $\frac{5\sqrt{3}}{6}$. **9** a) 8 cm; b) $4\sqrt{3}$ cm.

Lecția 2. **1** 96 cm^2, 64 cm^3, $4\sqrt{3}$ cm. **2** 150 cm^2, 125 cm^3. **3** a) 216 cm^2; b) $36\sqrt{2}$ cm^2. **4** 294 cm^2, 343 cm^3. **5** $2\sqrt{6}$ cm, $16\sqrt{2}$ cm^3. **7** 144 cm^2, 216 cm^2, 216 cm^3. **8** $\frac{64}{27}$ cm^3, $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ cm. **9** a) $MD\perp DB$ și $MD\perp DD'$; b) $4\sqrt{6}$ cm. **10** a) 64 cm^2, 64 cm^3; b) $2\sqrt{2}$ cm. **11** a) 27; b) 152 cm^3, 216 cm^2. **12** b) $2,5<1,5\sqrt{3}$; c) 0,75 m. **13** 108 cm^2, 72 cm^3, $\sqrt{61}$ cm. **14** $2(12+35\sqrt{3})$ cm^2, $60\sqrt{3}$ cm^3. **15** 3 dm^3. **16** a) 1720 cm^2, $\sqrt{881}$ cm; b) 20 cm; c) $\frac{20}{3}$ cm. **17** a) 144 cm^2; b) $\frac{2\sqrt{2}}{7}$. **18** a) $24a^3$; b) $\frac{13a\sqrt{10}}{10}$; c) $\frac{12a}{5}$. **19** a) 60000 l; b) 1,2 m; c) 4 h 10 min. **20** a) 72 dm^3; b) $4x(10-2x)$ dm^2; c) 2,5 dm. **21** a) 30 cm; b) 2,32 m^2; c) $220+20\sqrt{13}>292$. **22** a) 1296 cm^3; b) $18\sqrt{34}$ cm^2, $\frac{36\sqrt{34}}{17}$ cm. **23** $256\sqrt{6}$ cm^2, $512\sqrt{6}$ cm^3.
24 a) $(8+16\sqrt{3})$ cm^2, $8\sqrt{3}$ cm^3; d) $\frac{\sqrt{15}}{4}$. **25** b) $\frac{5\sqrt{7}}{2}$; c) $60°$; d) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. **26** a) 4 dm^3; b) 1760 cm^2; c) $\frac{20\sqrt{6}}{3}$ cm. **27** a) 1600 cm^2; b) 30 cm; c) 2,56 cm. **28** a) 1,60 m; b) 400; 100. **30** 144 cm^2, $72\sqrt{3}$ cm^3. **31** $108\sqrt{3}$ cm^2. **32** 24 cm^2, $4\sqrt{6}$ cm^3. **33** b) $CM\perp(ABB')$; c) $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ cm.
34 a) $(150+50\sqrt{3})$ cm^2, $125\sqrt{3}$ cm^3; b) $60°$; c) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm. **35** a) $3\sqrt{3}$ m; b) $90\sqrt{3}$ m^3; c) 132 m^2. **36** b) $60°$; c) $\sqrt{192}<14$. **37** a) $9072\sqrt{3}$ cm^3; b) $9,072\sqrt{3}\ l<20\ l$; c) 81 cm. **38** a) $12\sqrt{3}$ cm^2; b) $24\sqrt{3}$ cm^2; c) 18 cm^3. **39** $48\sqrt{3}$ cm^3. **40** a) $54\sqrt{3}$ cm^2, 121,5 cm^3; b) 1,5 cm.
41 $(450+75\sqrt{3})$ cm^2, $\frac{1125\sqrt{3}}{2}$ cm^3.

TEST DE AUTOEVALUARE

SUBIECTUL I 1 27. 2 $30\sqrt{3}$. 3 60. 4 80. 5 44. 6 2,5. **SUBIECTUL al II-lea** 1 **C.** 2 **B.** 3 **A.** 4 **D.** 5 **A.** 6 **C.**
SUBIECTUL al III-lea 1 a) 15 cm; b) 48; c) cel puțin doi pești sunt într-un cub de la b), rezultă $d_{max}=10\sqrt{3}<10\cdot 1,75=17,5$.
2 a) 9 cm; b) 162 cm^2, $81\sqrt{3}$ cm^3; c) 4,5 cm.

Lecția 3. **1** a) $6\sqrt{15}$ cm, 24 cm; b) 4; c) $\frac{3\sqrt{15}}{2}$ cm; d) $3\sqrt{2}$ cm; e) $\frac{\sqrt{30}}{15}$. **2** a) 4 cm, $2\sqrt{7}$ cm; b) $DE\parallel AC$; c) $90°$; d) $\frac{\sqrt{19}}{3}$; e) $\frac{12\sqrt{21}}{7}$ cm.
3 a) 12 cm; b) 12 cm; c) $\frac{4}{5}$; d) $60°$. **4** a) $\sqrt{13}$ cm, 4 cm; b) $\frac{24}{25}$; c) $\sqrt{3}$ cm. **5** a) 8 cm; b) $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ cm; c) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm. **6** a) $5\sqrt{5}$ cm; b) $4\sqrt{5}$ cm; c) $2\sqrt{5}$ cm.
7 a) $60°$; b) $6\sqrt{3}$ cm; c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; d) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lecția 4. **2** $324\sqrt{3}$ cm^2, $432\sqrt{3}$ cm^2, $432\sqrt{6}$ cm^3. **3** a) 432 cm^2, $576\sqrt{2}$ cm^3; b) $6\sqrt{2}$ cm; c) $12\sqrt{5}$ cm. **4** $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ cm^3. **5** b) $18\sqrt{2}$ cm^3; c) $\frac{\sqrt{7}}{7}$.
7 b) $972\sqrt{3}$ cm^3; c) $72\sqrt{3}$ cm^3. **8** a) $(864+144\sqrt{3})$ cm^2; b) 10 cm. **9** a) $36\sqrt{3}+144\simeq 207$ cm^2; b) *da*. **10** a) $\sqrt{3}$ dm^2; b) 117,5 ml. **11** $64\sqrt{3}$ dm^3, $60°$.
12 $48\sqrt{3}$ cm^3, $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. **14** 36 cm^2, 12 cm^3. **15** $\frac{32\sqrt{2}}{3}$ cm^3, $45°$. **16** a) $\frac{256\sqrt{6}}{3}$ cm^3; b) $\frac{4\sqrt{42}}{7}$ cm. **17** b) 288 cm^3; c) $60°$; d) $6\sqrt{2}$ cm.
18 a) $144(\sqrt{3}+1)$ cm^2; b) $6\sqrt{2}$ cm. **19** a) $2\sqrt{6}$ m; b) $48(\sqrt{3}+1)$ m^2; c) $32\sqrt{6}$ m^3. **20** a) 2,25 m; b) $\frac{81}{256}$ m^3; c) $\frac{108+15\sqrt{1053}}{64}$ m^2.

TEME DE SINTEZĂ

1 Dacă se împarte împarte acvariul în 24 de cuburi cu muchia de 1 dm, într-un astfel de cub sunt cel puțin doi peștișori și distanța dintre ei este maxim $\sqrt{3}$ dm. **2** a) $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ cm^3; b) $\frac{9\sqrt{3}}{64}$; c) $\frac{317}{64}$%. **3** b) $\phi^n+\phi^{n+1}=\phi^n(1+\phi)=\phi^n\cdot\phi^2=\phi^{n+2}$.

TEST DE AUTOEVALUARE

SUBIECTUL I $\boxed{1}$ $9\sqrt{3}$. $\boxed{2}$ $5\sqrt{3}$. $\boxed{3}$ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. $\boxed{4}$ $18\sqrt{3}$. $\boxed{5}$ 16. $\boxed{6}$ $4\sqrt{3}$. **SUBIECTUL al II-lea** $\boxed{1}$ **D.** $\boxed{2}$ **B.** $\boxed{3}$ **A.** $\boxed{4}$ **B.** $\boxed{5}$ **C.** $\boxed{6}$ **D.**
SUBIECTUL al III-lea $\boxed{1}$ a) $400\,\text{cm}^3$; b) $VA=\sqrt{194}<\sqrt{196}=14$; c) $\frac{144}{13}$ cm. $\boxed{2}$ a) $54(\sqrt{7}+\sqrt{3})\,\text{cm}^2$; b) ΔACE este echilateral și $VA=VC=VE$; c) $\frac{1}{2}$.

Lecția 5. **2** a) $74\sqrt{3}\ \text{cm}^2$; b) $\frac{256\sqrt{3}}{3}\ \text{cm}^3$; c) $\frac{16}{7}$ cm, $\frac{12}{7}$ cm. **3** a) 4 cm; b) $24\sqrt{3}\ \text{cm}^3$; c) $\frac{24\sqrt{201}}{67}$ cm. **4** a) $972\,\text{cm}^2$, $(972+180\sqrt{3})\,\text{cm}^2$; b) $504\sqrt{26}\ \text{cm}^3$; c) $\sqrt{26}$. **5** b) $126\,\text{cm}^3$. **7** a) 4 cm; b) $\frac{37\sqrt{3}}{6}\ \text{cm}^3$; c) $13,6$ g. **8** a) $304\sqrt{2}\ \text{cm}^3$; b) $40\sqrt{22}\ \text{cm}^2$; c) $\frac{12\sqrt{26}}{13}$ cm. **9** b) 296 g; c) $1169,6$ g.
10 a) $560\,\text{cm}^2$; b) $448\,\text{cm}^3$. **12** a) $48\sqrt{2}\ \text{cm}^2$; b) 90°; c) $4\sqrt{2}$ cm; d) $\sqrt{3}$. **13** a) $84\sqrt{3}\ \text{cm}^2$; b) $222\sqrt{3}\ \text{cm}^3$; c) 12 cm; d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

TEME DE SINTEZĂ

1 a) $31,5\,\text{cm}^3$; b) da; c) 45°. **2** a) $72\sqrt{7}\ \text{cm}^2$, $156\sqrt{3}\ \text{cm}^3$; b) 30°.

TEST DE AUTOEVALUARE

SUBIECTUL I $\boxed{1}$ $210\sqrt{3}$. $\boxed{2}$ $\frac{83^2}{3}$. $\boxed{3}$ $84\sqrt{3}$. $\boxed{4}$ $168\sqrt{3}$. $\boxed{5}$ 144. $\boxed{6}$ 16. **SUBIECTUL al II-lea** $\boxed{1}$ **D.** $\boxed{2}$ **C.** $\boxed{3}$ **D.** $\boxed{4}$ **A.** $\boxed{5}$ **A.** $\boxed{6}$ **C.**
SUBIECTUL al III-lea $\boxed{1}$ a) 2 cm; b) $120\,\text{cm}^2$; c) 3 cm. $\boxed{2}$ a) $54\sqrt{91}\ \text{cm}^2$; b) $1008\sqrt{3}\ \text{cm}^3$; c) $9,6$ cm.

Lecția 6. **2** $120\pi\,\text{cm}^2$; $144\pi\,\text{cm}^3$. **3** a) $240\pi\,\text{cm}^3>750\,\text{cm}^3$; b) $120\pi\,\text{cm}^2$; c) $5472\,\text{cm}^2$, $23040\,\text{cm}^3$. **4** $96\pi\,\text{cm}^2$, $168\pi\,\text{cm}^2$, $288\pi\,\text{cm}^3$, $96\,\text{cm}^2$.
5 $16\pi\,\text{cm}^2$. **6** a) $90\pi\,\text{dm}^3$; b) aproximativ 212 *l*. **7** $436,8\pi\,\text{g}\simeq 1371,552$ g. **8** $(1000+250\pi)\,\text{cm}^2$. **9** $3,75\pi\,\text{dm}^3$, aproximativ $3,225\,\text{dm}^3$. **10** b) $175\pi\,\text{cm}^3$; c) $219,8$ g.

Lecția 7. **2** $1125\sqrt{7}\,\pi\,\text{cm}^3$. **3** b) $\frac{16384\sqrt{5}\,\pi}{3}$; c) $1536\pi\,\text{cm}^2$. **4** $(48+32\sqrt{3})\pi\,\text{cm}^2$, $64\pi\,\text{cm}^3$. **6** $256\pi\,\text{cm}^2$, $288\pi\,\text{cm}^2$, $\frac{128\sqrt{2}}{3}\pi\,\text{cm}^3$. **7** $96\pi\,\text{cm}^3$. **8** a) $54\sqrt{6}\,\pi\,\text{cm}^2$, $108\sqrt{6}\,\pi\,\text{cm}^3$; b) 45°. **9** $\frac{8}{3}\sqrt{3}\,\pi\,\text{cm}^3$. **10** $\frac{196\pi}{3}\ \text{cm}^2$, $\frac{5488\sqrt{2}}{81}\pi\,\text{cm}^3$. **11** 180°. **12** 2 cm. **13** $\frac{2197}{288}\pi\,\text{cm}^3$.

Lecția 8. **2** a) 10π cm; b) $10,248$ *l*; c) $36\sqrt{442}\,\pi\,\text{cm}^2$. **3** a) $168\pi\,\text{cm}^2$; b) $312\sqrt{3}\,\pi\,\text{cm}^3$; c) $5\sqrt{3}$ cm. **4** $229,84\,\text{dm}^3$. **5** a) 60°; b) $800\pi\,\text{cm}^2$; c) 180°.
6 a) $132\pi\,\text{cm}^2$, $\frac{152\sqrt{3}}{3}\pi\,\text{cm}^3$; b) $\frac{8\sqrt{3}}{13}$ cm. **7** a) $32\sqrt{5}\,\pi\,\text{cm}^2$; b) $\frac{416\pi}{3}\ \text{cm}^3$; c) $72\sqrt{5}<161$. **8** a) $32\sqrt{5}\,\pi\,\text{cm}^2$; b) $144\pi\,\text{cm}^3$; c) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ cm.

Lecția 9. **1** $36\pi\,\text{cm}^2$, $36\pi\,\text{cm}^3$. **2** $144\pi\,\text{cm}^2$. **3** $36\pi\,\text{cm}^2$. **4** aproximativ $42,235\,\text{cm}^3$. **5** aproximativ $128\,614\,400\,\text{km}^2$. **6** a) 12 cm; b) $144\pi\,\text{cm}^3$; c) sunt egale. **7** aproximativ $2,5$ ml. **8** a) 10 cm; b) 8 cm, 6 cm; c) aproximativ $52,8\%$. **9** a) $5\pi\,\text{cm}^3$; b) $\frac{24\pi}{5}\ \text{cm}^3$; c) 4%.

TEME DE SINTEZĂ

1 a) $OO'=8$ cm, $VA=\sqrt{34}$ cm; b) $(66+3\sqrt{34})\pi\,\text{cm}^2$; c) $105\pi\,\text{cm}^3$. **2** a) 18 cm; b) $66,6\%$.
3 a) $200(810+\pi)\,\text{cm}^3$; b) $IB=20\sqrt{33}>110$; c) $4(44+5\pi)\,\text{dm}^2$.

TEST DE AUTOEVALUARE

SUBIECTUL I $\boxed{1}$ 96π. $\boxed{2}$ 54π. $\boxed{3}$ 162π. $\boxed{4}$ 72π. $\boxed{5}$ 4. $\boxed{6}$ 3. **SUBIECTUL al II-lea** $\boxed{1}$ **B.** $\boxed{2}$ **C.** $\boxed{3}$ **D.** $\boxed{4}$ **A.** $\boxed{5}$ **D.** $\boxed{6}$ **B.**
SUBIECTUL al III-lea $\boxed{1}$ a) 10 cm; b) $\frac{1000\sqrt{17}\,\pi}{3}\ \text{cm}^3$; c) $\mathcal{A}l=400\pi\,\text{cm}^2$ și $3,14<\pi<3,15$. $\boxed{2}$ a) 39 cm; b) $\frac{180}{13}$ cm; c) $d=12\sqrt{25\pi+9}<12\cdot 10=120$.

Teste pentru pregătirea examenului de Evaluare Națională

TESTUL 1 SUBIECTUL I 1. b). **2.** c). **3.** a). **4.** c). **5.** d). **6.** b). **SUBIECTUL al II-lea 1.** c). **2.** b). **3.** a). **4.** b). **5.** a). **6.** d).
SUBIECTUL al III-lea 1. a) $3\cdot 10=30<40$, deci nu este posibil ca Dan să cumpere mingea folosind doar 3 bancnote; b) 2 bancnote de 5 lei și 3 bancnote de 10 lei. **2.** b) $E(x)=\frac{1}{x-2}$, deci $E(x)\cdot(x-2)=1$. **3.** a) 0; b) $\sin\widehat{OEF}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **4.** b) $3\sqrt{3}$ cm. **5.** $AC\cap BD=\{O\}$; $\widehat{EOF}=\left(\widehat{(EBD);(FBD)}\right)$; $\widehat{EOF}=$ $=180^\circ-\widehat{EOA}-\widehat{FOC}=180^\circ-60^\circ-45^\circ=75^\circ$. **6.** a) $\widehat{VA;(ABC)}=\widehat{VAO}=30^\circ$, O centrul bazei ABC; b) $d(A;VM)=\frac{12\sqrt{21}}{7}$ cm.
TESTUL 2 SUBIECTUL I 1. c). **2.** a). **3.** b). **4.** d). **5.** d). **6.** c). **SUBIECTUL al II-lea 1.** c). **2.** a). **3.** d). **4.** a). **5.** d). **6.** a).
SUBIECTUL al III-lea 1. 4 vaze și 17 flori. **2.** b). $n=3$. **3.** a) $f(1)=2$ deci $A\in Gf$; b) $x\in(-\infty;1]$. **4.** b) $(24-2\sqrt{3})\,\text{cm}^2$. **5.** a) 9 dm; b) Fie $MN\perp(ABC)$, $N\in AC$ deci $\widehat{MO;(ABC)}=\widehat{MO;ON}=\widehat{MON}$ $\text{tg}\,\widehat{MON}=\frac{MN}{ON}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **6.** a) $17,757$ kg vopsea care costă $443,92$ lei; b) $48,1635\,\text{m}^2$ de tablă.

*

* *

Programa școlară poate fi accesată la adresa: http://programe.ise.ro

ISBN: 978-606-528-518-7

6 420620 007939

www.cdpress.ro